

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

Εκτιμητική και έλεγχος υποθέσεων

Δεγματοληψία και Δεγματικές κατανομές
Τυχαία δεγματοληψία
Εκτίμηση μέσου μ
Σημειακή εκτίμηση
Διαστήματα εμπιστοσύνης
Εκτίμηση του μέσου σε μικρά δείγματα
Έλεγχος υποθέσεων
Μηδενική και εναλλακτική υπόθεση – πορεία ελέγχου
Έλεγχος υποθέσεων για τον μέσο του πληθυσμού
Μονόπλευρος – ομφάλιευρος έλεγχος υπόθεσης
Έλεγχος διαφοράς ανόμια σε δύο μέσους
Έλεγχος μέσων σε ζεύγη τιμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

6.1 Δειγματοληψία και Δειγματικές κατανομές

Ο στόχος των περισσότερων στατιστικών αναλύσεων είναι η έγκυρη γενίκευση των συμπερασμάτων τους σε πληθυσμούς, στηριζόμενες σε δείγματα προερχόμενα από τους πληθυσμούς αυτούς.

Όμως, κάτω από ποιες συνθήκες ένα δείγμα μπορεί να οδηγήσει σε έγκυρη γενίκευση για τον πληθυσμό; Ας μελετήσουμε την περίπτωση της εκτίμησης του μέσου ύψους των μαθητών της τρίτης λυκείου. Το ζητούμενο είναι να δούμε κατά πόσο ένα δείγμα υψών από μαθητές τρίτης λυκείου θα μπορούσε να επιτρέψει γενίκευση σχετική με ολόκληρο τον πληθυσμό. Θα οδηγιόμασταν σε λανθασμένη εκτίμηση αν χρησιμοποιούσαμε ως δείγμα, για παράδειγμα, τα ύψη όλων των μαθητών που έχουν συμμετοχή στη ομάδα Basket-ball του σχολείου τους. Το ερώτημα ποιοι και πόσοι μαθητές θα έπρεπε να συμπεριληφθούν στο δείγμα της παραπάνω εκτίμησης δεν φαίνεται να έχει πολύ απλή απάντηση.

Οι θεωρίες της Επαγωγικής Στατιστικής, που αναπτύσσονται στο επόμενο μέρος αυτού του βιβλίου, στηρίζονται στην χρήση των **τυχαίων δειγμάτων**. Αυτή η επιμονή στα τυχαία δείγματα οφείλεται στο γεγονός ότι αυτά μας επιτρέπουν να κάνουμε έγκυρες και λογικές γενικεύσεις και γι αυτό χρησιμοποιούνται στην πράξη. Βεβαίως η λήψη τυχαίων δειγμάτων δεν είναι πάντα εφικτή γι' αυτό καταφεύγουμε σε άλλες τεχνικές δειγματοληψίας.

6.2 Τυχαία Δειγματοληψία

Στο σημείο αυτό είναι καλό να υπενθυμίσουμε τις διαφορές πληθυσμού και δείγματος αναφέροντας πως ο πληθυσμός αποτελείται από όλες τις δυνατές ή υποθετικά πιθανές παρατηρήσεις ενός φαινομένου ενώ το δείγμα είναι απλά μόνο ένα μέρος του πληθυσμού. Για να γίνουν κατανοητά αυτά που ακολουθούν πρέπει ακόμα να δοθούν οι ορισμοί του πεπερασμένου και άπειρου πληθυσμού.

Ο πεπερασμένος πληθυσμός αποτελείται από ένα συγκεκριμένο ή σταθερό αριθμό στοιχείων (παρατηρήσεις, μετρήσεις, αντικείμενα, μονάδες). Παραδείγματα πεπερασμένων πληθυσμών είναι: τα ύψη των 95.000 μαθητών της τρίτης λυκείου που φοιτούν κατά την τρέχουσα σχολική χρονιά, οι βαθμοί εισαγωγής των 1200 εισαχθέντων στις Φιλοσοφικές σχολές, η επιλογή ενός από τους τρεις υποψήφιους δημάρχους κατά τις δημοτικές εκλογές, των 28.200 δημοτών μιας πόλης. Σε αντίθεση με τον πεπερασμένο στον άπειρο πληθυσμό δεν έχουμε όριο στον αριθμό των στοιχείων που μπορεί να περιλαμβάνει. Παράδειγμα άπειρου πληθυσμού είναι τα αποτελέσματα όλων των δυνατών γυρισμάτων μιας ρουλέτας.

Δείγματα από πεπερασμένους πληθυσμούς

Τυχαία δειγματοληψία: Θεωρούμε πληθυσμό μεγέθους N και συμβολίζουμε $X_1, X_2, \dots, X_N$ τα στοιχεία του. Η μέθοδος επιλογής δείγματος δεδομένου μεγέθους n με γνωστή πιθανότητα επιλογής του, ονομάζεται «τυχαία δειγματοληψία».

Συγκεκριμένα : Από τον πληθυσμό των N στοιχείων μπορούμε να επιλέξουμε

$r = \binom{N}{n}$ δυνατά δείγματα μεγέθους n . Αν $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r$ τα r δείγματα και $p_1, p_2,$

$p_3, \dots, p_r$ οι αντίστοιχες πιθανότητες επιλογής τους, τότε ισχύει ότι:

$$0 \leq p_i \leq 1 \text{ για κάθε } i=1,2,\dots,r \text{ και } \sum_{i=1}^r p_i = 1$$

Κάθε διαδικασία επιλογής δείγματος δ_i , με δεδομένη πιθανότητα p_i ονομάζεται **τυχαία δειγματοληψία** και το δείγμα που επιλέγεται με βάση αυτήν τη διαδικασία, ονομάζεται **τυχαίο δείγμα**.

Η απλούστερη μορφή δειγματοληψίας αντιστοιχεί στην περίπτωση που οι πιθανότητες $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ είναι ίσες μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή έχουμε «απλή τυχαία δειγματοληψία»

Απλή τυχαία δειγματοληψία : Αποτελεί μέθοδο τυχαίας δειγματοληψίας με βάση την οποία σε κάθε ένα των r δειγμάτων, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_r$ οι πιθανότητες επιλογής τους, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ είναι ίσες μεταξύ τους. Δηλαδή:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{\binom{N}{n}}$$

Το δείγμα που επιλέγεται με βάση την απλή τυχαία δειγματοληψία ονομάζεται **απλό τυχαίο δείγμα**.

Από τον πληθυσμό $N=4$ μιας τάξης Ιαπωνικής γλώσσας υπάρχουν μαθητές, {η Ελένη(Ε), ο Γιάννης(Γ), ο Κώστας(Κ), η Μαρία(Μ)}, επιλέγουμε δείγματα μεγέθους $n = 2$ μαθητών. Πότε τα δείγματα αυτά είναι απλά και τυχαία.;

Σύμφωνα με όσα είπαμε ο αριθμός των δυνατών δειγμάτων είναι $r = \binom{N}{n} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$, με τις ακόλουθες συνθέσεις $\delta_1 = \{Ε, Γ\}$,

$\delta_2 = \{Ε, Κ\}$, $\delta_3 = \{Ε, Μ\}$, $\delta_4 = \{Γ, Κ\}$, $\delta_5 = \{Γ, Μ\}$, $\delta_6 = \{Κ, Μ\}$. Αν καθένα των δειγμάτων αυτών επιλεγεί με πιθανότητα $1/6$, δηλ $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{r} = \frac{1}{6}$, τότε κάθε δείγμα αποτελεί απλό τυχαίο δείγμα.

Πως όμως μπορεί να εξασφαλιστεί ίση πιθανότητα επιλογής κάθε δείγματος;

Μια πρόχειρη και καθόλου πρακτική λύση για πραγματικά σύνθετα προβλήματα δειγματοληψίας, αποτελεί η καταγραφή όλων των δυνατών δειγμάτων σε

διαφορετικά κομμάτια χαρτιού, η τοποθέτησή τους σε κουτί και στη συνέχεια επιλογή κάποιου απ' αυτά χωρίς κοίταγμα.

Αντ' αυτής, αριθμούμε από το 1 έως το N όλα τα στοιχεία του πληθυσμού από τον οποίο πρόκειται να επιλέξουμε δείγμα μεγέθους v . Από τους N αυτούς αριθμούς επιλέγουμε τους v κατά τρόπο ώστε κάθε φορά οι αριθμοί που απομένουν στο κουτί να έχουν την ίδια τύχη να επιλεγούν. Οι v πρώτοι αριθμοί που θα επιλεγούν με βάση αυτή τη διαδικασία αντιστοιχούν στα στοιχεία του πληθυσμού που θα είναι τελικά στο δείγμα.

Η διαδικασία που περιγράψαμε εξασφαλίζει τις προϋποθέσεις της απλής τυχαιάς δειγματοληψίας, με συνέπεια όλα τα δυνατά δείγματα από τον πληθυσμό να έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής.

Πράγματι: Ας υποθέσουμε ότι από τον πληθυσμό $N = 4$, επιλέγουμε με τη διαδικασία που περιγράψαμε δείγμα μεγέθους $v=2$, τότε στην πρώτη επιλογή η πιθανότητα με την οποία ένα μέλος του δείγματος θα επιλεγεί, ισούται με

$$\frac{v}{N} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Στη δεύτερη επιλογή η πιθανότητα κάποιο από τα υπόλοιπα $v-1 = 2-1$ στοιχεία του δείγματος να επιλεγεί είναι ίση με $\frac{v-1}{N-1} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$

Αρα τα $v=2$ στοιχεία του δείγματος θα έχουν επιλεγεί κατά τις $v=2$ επιλογές με πιθανότητα $\frac{v}{N} \cdot \frac{v-1}{N-1} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Γενικεύοντας για δείγμα με v στοιχεία από πληθυσμό N στοιχείων έχουμε ότι η πιθανότητα που έχει κάθε δείγμα να επιλεγεί με την αρχή της απλής τυχαιάς δειγματοληψίας είναι:

$$\begin{aligned} \frac{v}{N} \cdot \frac{v-1}{N-1} \cdot \frac{v-2}{N-2} \cdots \frac{1}{N-(v-1)} &= \frac{v!}{N(N-1)(N-2) \cdots [N-(v-1)]} = \\ \frac{v!}{N!} &= \frac{v!(N-v)!}{N!} = \frac{1}{\frac{N!}{v!(N-v)}} = \frac{1}{\binom{N}{v}} \end{aligned}$$

Συνεπώς για να επιλεγεί ένα τυχαίο δείγμα από $v=20$ καρτέλες υπαλλήλων μιας εταιρείας που αριθμεί $N=192$ υπαλλήλους, αρκεί να γραφούν οι αριθμοί μητρώου των υπαλλήλων της εταιρείας σε 192 κλήρους τους οποίους ρίχνουμε σε ένα κουτί. Επιλέγοντας διαδοχικά χωρίς να κοιτάμε 20 κλήρους χωρίς επανατοποθέτηση έχουμε το ζητούμενο τυχαίο δείγμα.

Ακόμα και αυτή η τελευταία απλή διαδικασία δεν είναι απαραίτητη στην πράξη όταν διαθέτουμε έναν πίνακα τυχαίων ψηφίων (ή τυχαίων αριθμών). Οι πίνακες τυχαίων αριθμών αποτελούνται από σελίδες στις οποίες καταχωρούνται τα δεκαδικά ψηφία 0, 1, ..., 9. Τα ψηφία έχουν τοποθετηθεί πάνω στον πίνακα έτσι ώστε

κάθε ψηφίο να έχει την ίδια πιθανότητα, $1/10$, να εμφανιστεί σε μια θέση του πίνακα. Στις μέρες μας τέτοιοι πίνακες δημιουργούνται από υπολογιστές (Πίνακας Α του παραρτήματος).

Στην περίπτωση που υπάρχει η λίστα (ή μπορεί να κατασκευαστεί) των ατόμων του πεπερασμένου πληθυσμού, η διαδικασία με τη χρήση πινάκων τυχαίων αριθμών διευκολύνει σημαντικά την λήψη τυχαίων δειγμάτων. Υπάρχουν δυστυχώς περιπτώσεις κατά τις οποίες η χρήση των πινάκων τυχαίων αριθμών είναι αδύνατη. Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα.

Κάποιοι ιχθυολόγοι ερευνητές προτίθενται να εκτιμήσουν το μέσο βάρος του βακαλάου που μπορεί να αλιευθεί σε ένα συγκεκριμένο κόλπο. Μια τέτοια εκτίμηση σε συνδυασμό με άλλα στοιχεία θα μπορούσε να οδηγήσει σε πρόβλεψη για το μέλλον του συγκεκριμένου αλιεύματος στην περιοχή.

Είναι αντιληπτό πως είναι αδύνατο να αριθμήσουμε όλους τους βακαλάους που ζουν σ' αυτήν την περιοχή και να διαλέξουμε ορισμένους με τη διαδικασία των τυχαίων αριθμών. Στην περίπτωση των ψαριών όπως και σε άλλες περιπτώσεις αυτό που μπορεί να γίνει είναι να ενεργήσουμε σύμφωνα με τον ορισμό του «τυχαίου».

Αυτό σημαίνει να μην επιλεγεί ή απορριφθεί κανένα μέρος του πληθυσμού επειδή φαίνεται αντιπροσωπευτικό ή μη, ούτε να ευνοηθεί ή αγνοηθεί επειδή υπάρχει ευκολία ή δυσκολία στην πρόσβασή του. Διαδικασίες που παίρνουν υπόψη την παραπάνω έννοια του τυχαίου οδηγούν σε δείγματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, θεωρούμενα ως τυχαία δείγματα.

Παράδειγμα 1^ο:

Ο πίνακας Α (Παράρτημα) αποτελεί μέρος ενός πίνακα τυχαίων αριθμών και θα χρησιμοποιηθεί για να επιλεγεί το δείγμα των 20 καρτελών υπαλλήλων που είδαμε παραπάνω.

Απάντηση

Αριθμούμε από 1 έως 192 τους υπαλλήλους πάνω σε μια λίστα με τα ονόματα τους. Ξεκινώντας από μια τυχαία θέση στον πίνακα κινούμαστε προς μια τυχαία κατεύθυνση διαβάζοντας τριψήφιους αριθμούς. Για παράδειγμα εκκινώντας από την 11^η γραμμή του πίνακα και καταγράφοντας τους αριθμούς που σχηματίζονται από τα ψηφία στην 12^η, 13^η και 14^η στήλη διατρέχοντας τη σελίδα προς τα κάτω, βρίσκουμε τους υπαλλήλους με αριθμούς:

150	78	174	161	102	145	56	157	53	89	85	162	74	73	37	105	144	1	129	162
-----	----	-----	-----	-----	-----	----	-----	----	----	----	-----	----	----	----	-----	-----	---	-----	-----

Οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 192 αγνοούνται. Επίσης αγνοείται οποιαδήποτε επανεμφάνιση ενός αριθμού. Αν φθάσουμε στην τελευταία γραμμή του πίνακα μπορούμε να συνεχίσουμε από την πρώτη γραμμή του στις στήλες 15, 16 και 17 για παράδειγμα.

6.3 Εκτίμηση μέσου μ

Η στατιστική επαγωγή διαιρείται παραδοσιακά σε προβλήματα εκτίμησης, στα οποία γίνεται εκτίμηση διαφόρων αγνώστων παραμέτρων των πληθυσμών, και σε ελέγχους υποθέσεων όπου δεχόμαστε ή απορρίπτουμε συγκεκριμένους ισχυρισμούς γύρω από τους πληθυσμούς ή τις παραμέτρους των. Προβλήματα εκτίμησης προκύπτουν τόσο στην καθημερινή ζωή όσο στην επιστήμη και στις επιχειρήσεις.

Στην καθημερινή ζωή μπορεί να έχει ενδιαφέρον να γνωρίζουμε πόσο χρόνο χρειαζόμαστε καθημερινά για να πάμε στη δουλειά μας, ποια είναι η αναμενόμενη διακύμανση της επίδοσης ενός μαθητή στο σχολείο, τι ποσοστό παραθεριστών δείχνει προτίμηση στις διακοπές κοντά στη θάλασσα

Στις επιστήμες, ένας ιατρός ερευνητής μπορεί να θέλει να καθορίσει το επίπεδο της χοληστερόλης μετά την λήψη ενός φαρμάκου, ένας μηχανικός μπορεί να ενδιαφέρεται για την μεταβλητότητα της αντοχής ενός νέου κράματος και μία βιολόγος μπορεί να θέλει να καθορίσει το ποσοστό των μελισσών που γεννιούνται με κάποιο ελάττωμα.

Στις επιχειρήσεις, οι διαχειριστές μιας τράπεζας επιθυμούν να εκτιμηθεί ο χρόνος που διαρκεί μια τραπεζική συναλλαγή στα ταμεία, οι υπεύθυνοι ελέγχου της παραγωγής σε μια βιομηχανία επιθυμούν να γνωρίζουν τη διακύμανση της διαμέτρου του ρουλεμάν που κατασκευάζουν, σε μια εταιρεία του τομέα συγκοινωνιών θέλουν να (γνωρίζουν το ποσοστό των επιβατών που επιθυμεί κάποια συγκεκριμένη προτεινόμενη αλλαγή στα δρομολόγια) ώστε να εκτιμηθεί το ποσοστό πληρότητας των δρομολογίων της.

Σε κάθε ένα από τα παραπάνω παραδείγματα ενδιαφερόμαστε για τον προσδιορισμό της «πραγματικής» τιμής μιας ποσότητας. Τα παραδείγματα αυτά αφορούν προβλήματα εκτίμησης. Σε κάθε ομάδα παραδειγμάτων που αναφέρθηκαν το πρώτο αναφέρεται στην εκτίμηση του μέσου, το δεύτερο στην εκτίμηση κάποιου μέτρου μεταβλητότητας ενώ το τρίτο στην εκτίμηση ενός ποσοστού ή μίας αναλογίας. Επειδή, όπως θα αντιληφθούμε στα επόμενα κεφάλαια, η διαδικασία εκτίμησης διαφέρει για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις πρέπει να πούμε πως σ' αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με την εκτίμηση (επαγωγή) του μέσου.

6.3 Σημειακή εκτίμηση

Η εκτίμηση μιας παραμέτρου ενός πληθυσμού π.χ. του μέσου μ ή της τυπικής απόκλισης σ γίνεται από τα αντίστοιχα δειγματικά μεγέθη $\bar{X}$, s . Κάθε φορά που έχουμε ένα δείγμα μεγέθους n από τον πληθυσμό έχουμε και μια εκτίμηση της τιμής της παραμέτρου του πληθυσμού. Η τιμή αυτή «προσδοκούμε να είναι ίση» με την τιμή της άγνωστης παραμέτρου. Λέμε ότι «προσδοκούμε να είναι ίση» και όχι «είναι ίση», αφού κάθε εκτίμηση περιέχει σφάλμα όπως είδαμε και στη συζήτηση που κάναμε στη δειγματική κατανομή του μέσου.

Παρακάτω θα δούμε τα προβλήματα που προκύπτουν κατά την εκτίμηση του μέσου, με τη βοήθεια ενός παραδείγματος σχετικού με την εκτίμηση του μέσου χρόνου που διαρκεί μια τραπεζική συναλλαγή (σε δευτερόλεπτα) στα αυτόματα μηχανήματα μιας τράπεζας. Οι χρόνοι από ένα (φανταστικό) τυχαίο δείγμα 45 τέτοιων συναλλαγών δίνονται παρακάτω:

103	131	171	122	142	80	89	89	113	128
82	178	162	99	82	133	127	90	152	115
103	164	141	121	145	166	113	71	103	144
105	74	106	127	82	105	133	113	128	136
9	113	109	127	124					

Ο μέσος του δείγματος είναι $\bar{x} = 117,56$ δευτερόλεπτα, και οι υπεύθυνοι της τράπεζας θέλουν να εκτιμήσουν με τον αριθμό αυτό τον πραγματικό μέσο χρόνο μ που απαιτείται για να ολοκληρωθεί μια τέτοια συναλλαγή. Μια εκτίμηση τέτοιου τύπου λέγεται **εκτίμηση σημείου**, αφού αποτελείται από ένα και μοναδικό αριθμό.

Αν και η εκτίμηση σημείου είναι ο πιο κοινός τρόπος εκτίμησης παραμέτρων δημιουργεί πολλά ερωτήματα. Μπορεί να αναρωτηθεί κανείς, για παράδειγμα, σχετικά με την ποσότητα της πληροφορίας στην οποία στηρίχτηκε αυτή η εκτίμηση και σχετικά με την μεταβλητότητα του χρόνου που απαιτείται για την ολοκλήρωση μια συναλλαγής σε ένα αυτόματο μηχάνημα μιας τράπεζας. Γι' αυτό συμπληρώνεται η εκτίμηση $\bar{x} = 117,56$ του μέσου μ , με την πληροφορία ότι ο αριθμός στηρίχτηκε σε $n = 45$ παρατηρήσεις και η τυπική απόκλιση του δείγματος ήταν $s = 28,72$.

Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, η δειγματική κατανομή του μέσου για μεγάλα τυχαία δείγματα ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή. Έτσι μπορούμε να ισχυριστούμε με πιθανότητα $1-\alpha$ πως ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$, διαφέρει από το μέσο του πληθυσμού μ , «το πολύ» κατά $z_{\alpha/2}$ τυπικά σφάλματα του μέσου, όπου $z_{\alpha/2} : P(Z < -z_{\alpha/2}) = P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για μεγάλα δείγματα από άπειρους (ή πολύ μεγάλους) πληθυσμούς, η δειγματική κατανομή του μέσου είναι κατά προσέγγιση κανονική, με

$$\mu_{\bar{x}} = \mu \quad \text{και} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{v}}$$

βρίσκουμε ότι ο $\bar{X}$, διαφέρει «το πολύ» κατά $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{v}}$.

Συνεπώς, αφού $\bar{X} - \mu$, είναι το σφάλμα που κάνουμε εκτιμώντας τον μέσο μ , με τον $\bar{X}$, υπάρχει πιθανότητα 1- α να σφάλουμε, υποτιμώντας ή υπερτιμώντας τον μέσο μ , «το πολύ» κατά :

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{v}} \quad (6.1)$$

όταν $v \geq 30$ και ο πληθυσμός είναι αρκετά μεγάλος τότε ο παράγοντας $\sqrt{\frac{N-v}{N-1}}$ του πεπερασμένου πληθυσμού δεν είναι απαραίτητος. Το E ονομάζεται **μέγιστο σφάλμα της εκτίμησης**.

Η συνηθέστερη τιμή της πιθανότητας 1- α που χρησιμοποιείται στην πράξη, είναι 0,95 και η αντίστοιχη τιμή του $\alpha/2$ είναι 0,025 ενώ η τιμή $z_{0,025} = 1,96$. Η τελευταία προκύπτει από τον πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής (Παράρτημα-Πίνακας Β): Πράγματι για την πιθανότητα $1,00 - 0,025 = 0,975$, η αντιστοιχούσα τιμή είναι 1,96.

Όταν τα δεδομένα έχουν ληφθεί και μπορεί να εκτιμηθεί ο μέσος μ , συνηθίζεται ο όρος **εμπιστοσύνη** αντί του όρου πιθανότητα 1- α με την οποία λαμβάνεται το μέγιστο σφάλμα E . Εμπλέκεται ο όρος πιθανότητα όταν γίνεται λόγος για τις μελλοντικές τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής, ενώ μιλάμε για εμπιστοσύνη, που εκφράζεται σε εκατοστιαίες μονάδες, στην περίπτωση που έχουμε συγκεκριμένες τιμές για την μεταβλητή.

Στον υπολογισμό του μεγίστου σφάλματος E υπάρχει ένα εμπόδιο. Η τυπική απόκλιση του πληθυσμού, που εισέρχεται στον τύπο του E , είναι άγνωστη στις περισσότερες περιπτώσεις. Τότε, χρησιμοποιείται στη θέση της η τυπική απόκλιση S του δείγματος. Η αντικατάσταση αυτή είναι αποδεκτή όταν το μέγεθος του δείγματος είναι $v \geq 30$.

Παράδειγμα 2°:

Αναφερόμενοι στο παράδειγμα της παραγράφου 6.4, ποιο είναι το μέγιστο σφάλμα με εμπιστοσύνη 95%, όταν χρησιμοποιηθεί ο μέσος $\bar{x} = 117,56$ ως εκτίμηση του μέσου χρόνου που διαρκεί μια τραπεζική συναλλαγή σε αυτόματο μηχάνημα.

Απάντηση

Για τον υπολογισμό του E διαθέτουμε τον τύπο της παραγράφου 6.4. Η τιμή της τυπικής απόκλισης σ του πληθυσμού είναι άγνωστη και θα αντικατασταθεί από την s αφού το μέγεθος του δείγματος είναι $n=45>30$. Αντικαθιστώντας τα n , s και $z_{0,025}$ με 45, 28,72 και 1,96 βρίσκουμε ότι με εμπιστοσύνη 95% το σφάλμα είναι «το πολύ» :

$$E = 1,96 \cdot \frac{28,72}{\sqrt{45}} = 8,39 \text{ δευτερόλεπτα}$$

6.5 Διαστήματα εμπιστοσύνης

Σ' αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε ένα διαφορετικό τρόπο εκτίμησης του μέσου του πληθυσμού με τη βοήθεια του δειγματικού μέσου. Αφού η δειγματική κατανομή του μέσου για μεγάλα δείγματα από άπειρο πληθυσμό είναι κατά προ-

σέγγιση κανονική με μέσο το μ και τυπική απόκλιση $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, η τιμή: $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

προέρχεται από τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή. Αφού μια τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής βρίσκεται στο διάστημα $(-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2})$ ή $-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}$, με πιθανότητα $1-\alpha$, αντικαθιστώντας το Z με την τιμή του θα έχουμε:

$$-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}$$

από την οποία επιλύοντας και τις δυο ανισότητες ως προς μ παίρνουμε:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6.2)$$

Μπορούμε δηλαδή να ισχυριστούμε με εμπιστοσύνη $(1-\alpha)100\%$ ότι το διάστημα $\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ που καθορίζεται από τα δεδομένα ενός μεγάλου δείγματος περιλαμβάνει τον μέσο του πληθυσμού που θέλουμε να εκτιμήσουμε. Αν η τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού είναι άγνωστη αντικαθίσταται από

τη τυπική απόκλιση s του δείγματος. Το παραπάνω διάστημα καλείται **διάστημα εμπιστοσύνης** ενώ τα άκρα του λέγονται **όρια εμπιστοσύνης** και η τιμή 1- α **βαθμός εμπιστοσύνης**. Οι συνήθεις τιμές του βαθμού εμπιστοσύνης είναι 0,95 και 0,99. Οι εκτιμήσεις που δίνονται με τη μορφή διαστήματος τιμών λέγονται εκτιμήσεις διαστήματος.

Παράδειγμα 3^ο:

Με τα στοιχεία του παραδείγματος του χρόνου τραπεζικής συναλλαγής σε αυτόματο μηχάνημα της παραγράφου 6.3., να γίνει εκτίμηση διαστήματος κατασκευάζοντας ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τον μέσο του πληθυσμού.

Απάντηση

Αντικαθιστώντας στον τύπο του διαστήματος εμπιστοσύνης της 6.2, $n = 45$, $\bar{x} = 117,56$, $\sigma = s = 28,72$ και βρίσκοντας το $z_{0,005} = 2,575$ από τον πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής (Παράρτημα-Πίνακας Β) για τιμή εισόδου $1,000-0,005 = 0,995$ έχουμε:

$$117,56 - 2,575 \cdot \frac{28,72}{\sqrt{45}} < \mu < 117,56 + 2,575 \cdot \frac{28,72}{\sqrt{45}}$$

$$106,54 < \mu < 128,58$$

που αποτελεί το ζητούμενο 99% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο συναλλαγής σε αυτόματο μηχάνημα. Εδώ πρέπει να διευκρινιστεί, πως ο μέσος χρόνος μπορεί να ανήκει ή όχι στο διάστημα (106,54, 128,58) αλλά μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το 99% τέτοιων διαστημάτων που μπορεί να κατασκευαστούν με τη βοήθεια τυχαίων δειγμάτων μεγέθους $n=45$, περιέχουν τον μέσο χρόνο συναλλαγής.

6.6 Εκτίμηση του μέσου σε μικρά δείγματα

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε περιπτώσεις μεγάλων δειγμάτων ($n > 30$) όπου η δειγματική κατανομή είναι κανονική και στους τύπους που συναντήσαμε η τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού μπορούσε να αντικατασταθεί από την s .

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε μια αντίστοιχη διαδικασία στην περίπτωση των μικρών δειγμάτων, θα πρέπει να δεχτούμε ότι τα δείγματα προέρχονται από κανονικούς (κατά προσέγγιση) πληθυσμούς. Τότε η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \text{ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή και δεν έχουμε κανένα πρό-}$$

βλημα στην κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης κατά τα γνωστά. Το πρόβλημα προκύπτει όταν η σ είναι άγνωστη και πρέπει να εκτιμηθεί από την τυπική απόκλιση s του δείγματος όπως συμβαίνει στην πράξη.

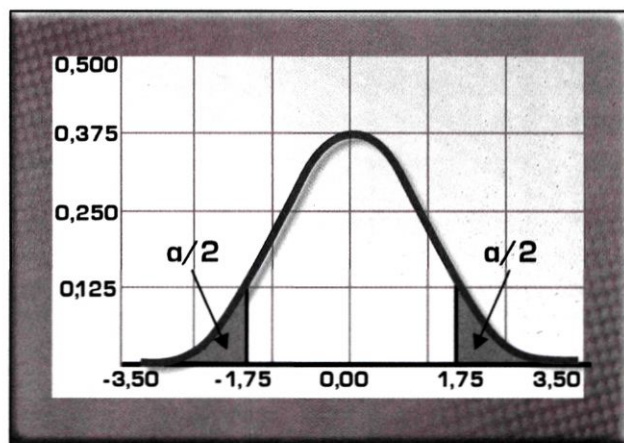
Σ' αυτή την περίπτωση η κατανομή της $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ δεν είναι η κανονική, αλλά α-

κολουθεί την *student-t κατανομή* ή απλά *t κατανομή*. Η κατανομή t , όπως ήδη γνωρίζουμε, παρουσιάζει συμμετρική μορφή και έχει μέσο 0, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1. Στην πραγματικότητα πρόκειται για μια οικογένεια κατανομών και η μορφή κάθε μέλους εξαρτάται από την τιμή $n-1$ η οποία καλείται *αριθμός βαθμών ελευθερίας*.

Όπως ορίστηκαν οι τιμές $-z_{\alpha/2}$ και $z_{\alpha/2}$ στην περίπτωση της τυπικής κανονικής κατανομής, με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι $-t_{\alpha/2}$ και $t_{\alpha/2}$ έτσι ώστε το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη της κατανομής και ανάμεσα σ' αυτές να είναι ίσο με $1-\alpha$, όπως φαίνεται και στο σχήμα (6.1). Και επειδή οι τιμές αυτές εξαρτώνται από τους $n-1$ βαθμούς ελευθερίας, στον πίνακα Γ (Παράρτημα) της t δίνονται οι διάφορες τιμές $t_{\alpha/2}$ ($t_{0,025}$, $t_{0,005}$ κ.λ.π.) για βαθμούς ελευθερίας 1 έως 29.

Με τρόπο ακριβώς ανάλογο μ' αυτόν της παραγράφου 6.4. καταλήγουμε στον $(1-\alpha)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τον μ :

$$\bar{x} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (6.3)$$



Σχ. (6.1)

Κατανομή Student με 2 βαθμούς ελευθερίας.

Παράδειγμα 4^ο:

Τα παρακάτω αποτελέσματα προέρχονται από ένα τυχαίο δείγμα 25 πρωτοετών φοιτητών σε ένα Πανεπιστήμιο και αναφέρονται στους βαθμούς που έλαβαν κατά την εξέταση επάρκειας στα Μαθηματικά: $\bar{x}=85, s=15$

Να κατασκευαστεί ένα διάστημα 95% εμπιστοσύνης για τον μέσο μ του πληθυσμού των πρωτοετών του συγκεκριμένου Πανεπιστημίου.

Απάντηση

Αφού πρόκειται για μικρό δείγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η t κατανομή αν δεχτούμε ότι οι βαθμοί όλων των πρωτοετών φοιτητών κατανέμονται περίπου κανονικά. Από τον πίνακα της t κατανομής (Παράρτημα -Πίνακας Γ) στην γραμμή 24 ($v-1 = 24$ βαθμοί ελευθερίας) κάτω από τη στήλη $t_{0,025}$ βρίσκουμε την τιμή 2,064.

Από τη σχέση (6.3) για $\bar{x}=85, s=15, t_{0,025}=2,064, v=25$

έχουμε : $78,81 < \mu < 91,19$.

6.7 Έλεγχος υποθέσεων

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με προβλήματα εκτίμησης. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μας απασχολήσουν προβλήματα στα οποία πρέπει να αποφασιστεί, αν η παράμετρος ενός πληθυσμού είναι ίση ή όχι με κάποια συγκεκριμένη τιμή. Οι διαδικασίες απόφασης για την απόρριψη τέτοιων υποθέσεων, ονομάζονται *έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων*.

Ας ξαναδούμε το πρόβλημα της παραγράφου 6.4. Αν οι υπεύθυνοι της τράπεζας ήθελαν να ελέγξουν τον ισχυρισμό ότι ο μέσος χρόνος συναλλαγής ξεπερνά τα 2 λεπτά, τότε θα βρισκόμασταν μπροστά σε ένα πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων. Στην περίπτωση αυτή πρέπει στηριζόμενοι στα δεδομένα του τυχαίου δείγματος που διαθέτουν να ελέγξουν την υπόθεσή τους.

Ένας εκπαιδευτικός-ερευνητής με μακρόχρονη διδακτική εμπειρία, θεωρεί ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών με τη βοήθεια της μεθόδου «Επίλυση Προβλήματος» βελτιώνει την επίδοση των μαθητών. Και εδώ πρόκειται για ένα πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων αφού ο ερευνητής καλείται να αποφασίσει με τη βοήθεια ενός δείγματος μαθητών που διδάχτηκε με τη μέθοδο «Επίλυση Προβλήματος» κατά πόσο ο μέσος μ του πληθυσμού των μαθητών αυτών είναι ίσος ή διαφέρει από την τιμή 14,2 που είναι ο μέσος του πληθυσμού των μαθητών όταν διδάσκεται με τον κλασσικό τρόπο διδασκαλίας.

Στα παρακάτω αναλύεται η διαδικασία του ελέγχου στατιστικών υποθέσεων.

6.8 Μηδενική και Εναλλακτική υπόθεση - Πορεία ελέγχου

Δυο στατιστικές υποθέσεις εμπλέκονται στον έλεγχο υποθέσεων. Η πρώτη είναι αυτή που ελέγχεται, ονομάζεται συνήθως **μηδενική υπόθεση** και συμβολίζεται με H_0 . Μερικές φορές, η μηδενική υπόθεση λέγεται και **υπόθεση μη διαφοράς**, επειδή είναι μια άποψη που συμφωνεί με τις συνθήκες που θεωρούμε ότι αληθεύουν για τον πληθυσμό που μελετούμε.

Γενικά η μηδενική υπόθεση διατυπώνεται με σκοπό να αμφισβητηθεί. Συνεπώς το συμπλήρωμα (αντίθετο) του συμπεράσματος στο οποίο θέλει να φθάσει ο ερευνητής, γίνεται μηδενική υπόθεση. Με τον έλεγχο, η μηδενική υπόθεση είτε απορρίπτεται, είτε δεν απορρίπτεται. Αν δεν απορριφθεί, λέμε ότι, τα δεδομένα πάνω στα οποία στηρίζεται ο έλεγχος, δεν επαρκούν για την απόρριψή της. Εάν ο έλεγχος οδηγήσει στην απόρριψή της, τότε συμπεραίνουμε ότι τα δεδομένα δεν επαληθεύουν τη μηδενική υπόθεση, αλλά είναι συμβατά με κάποια άλλη. Αυτή η άλλη υπόθεση λέγεται **εναλλακτική υπόθεση**, συμβολίζεται δε με H_1 .

Μια ένδειξη ισότητας ή ανισοισότητας πρέπει να εμφανίζεται στη μηδενική υπόθεση (ένα απ' τα σύμβολα $=, \leq, \geq$). Σε ένα πειραματισμό λαμβάνουν μέρος 60 νήπια τα οποία υποβάλλονται σε ένα test δεξιοτήτων. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να απαντήσουμε στο εξής ερώτημα: Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μέσος του πληθυσμού, από τον οποίο προέρχεται το δείγμα των 60 νηπίων, δεν είναι ίσος με 14;

Η μηδενική υπόθεση είναι : $H_0 : \mu = 14$ ενώ η εναλλακτική $H_1 : \mu \neq 14$

Αν θέλουμε να ελέγξουμε την ορθότητα της υπόθεσης ότι ο μέσος είναι μεγαλύτερος από 14, τότε οι υποθέσεις γίνονται :

$$H_0 : \mu \leq 14 \quad H_1 : \mu > 14$$

Αν τέλος θέλουμε να ελέγξουμε την άποψη, ότι ο μέσος είναι μικρότερος από 14, έχουμε:

$$H_0 : \mu \geq 14 \quad H_1 : \mu < 14$$

Πρέπει να τονισθεί ότι ο έλεγχος υποθέσεων δεν οδηγεί στην απόδειξη της υπόθεσης, αλλά συμπεραίνει για το αν υποστηρίζεται η υπόθεση από τα διαθέσιμα δεδομένα. Όταν αποτυγχάνουμε στο να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση, δε λέμε ότι αυτή είναι αληθινή, αλλά ότι μπορεί να είναι αληθινή.

Στην συνέχεια κατασκευάζεται μια στατιστική η οποία ονομάζεται **κριτήριο ελέγχου** και η τιμή της υπολογίζεται από τα δεδομένα του δείγματος. Θα δούμε ότι το κριτήριο ελέγχου χρησιμεύει στο να πάρουμε απόφαση, επειδή το να απορρίψουμε ή όχι τη μηδενική υπόθεση εξαρτάται από το μέγεθος της τιμής του κριτηρίου.

Ένα παράδειγμα κριτηρίου που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση του παραδείγματος των 60 νηπίων είναι : $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

όπου μ_0 είναι η μια υποθετική τιμή του μέσου του πληθυσμού.

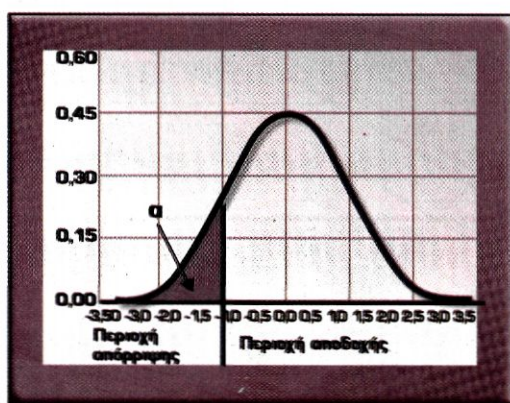
Αυτό το κριτήριο προέρχεται από τη γνωστή ποσότητα: $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Γενικά ισχύει ότι:

κριτήριο ελέγχου = (στατιστικό – υποτιθέμενη τιμή παραμέτρου)/ τυπικό σφάλμα

Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε ποια είναι η θεωρητική κατανομή που ακολουθείται απ' τη δειγματική κατανομή του κριτηρίου. Το κριτήριο, $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθινή και ισχύουν οι παραδοχές (εδώ αρκεί να ισχύει $n > 30$).

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το κριτήριο ελέγχου χωρίζονται σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελεί την περιοχή της απόρριψης και η άλλη την περιοχή της αποδοχής. Οι τιμές της περιοχής απόρριψης είναι αυτές που έχουν μικρή πιθανότητα να ληφθούν, όταν η μηδενική υπόθεση αληθεύει. Αντίθετα οι τιμές της περιοχής αποδοχής, έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να ληφθούν κάτω απ' τη μηδενική υπόθεση.



Σχ. 6.2.

Περιοχές αποδοχής και απόρριψης για επίπεδο σημαντικότητας α για την κατανομή κριτηρίου Z .

Σύμφωνα με τον κανόνα απόφασης, αν η τιμή του κριτηρίου που υπολογίζεται απ' το δείγμα που διαθέτουμε ανήκει στην περιοχή απόρριψης, τότε απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Αν αντίθετα η τιμή βρίσκεται στην περιοχή αποδοχής, τότε η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται.

Ο καθορισμός των περιοχών όπως είναι κατανοητό γίνεται με βάση την επιθυμητή πιθανότητα με την οποία ανήκει μια τιμή στην περιοχή απόρριψης. Η επιθυμητή αυτή πιθανότητα ονομάζεται *επίπεδο σημαντικότητας*. Ο όρος, επίπεδο σημαντικότητας, προέρχεται από το γεγονός ότι μια τιμή του κριτηρίου ελέγχου που ανήκει στην περιοχή απόρριψης, λέγεται *σημαντική*. Το επίπεδο σημαντικότητας εκφράζει το εμβαδόν που βρίσκεται ανάμεσα στην καμπύλη της κατανομής και το τμήμα του άξονα x , που αποτελεί την περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης (σχήμα 6.2.).

Είναι φανερό ότι το α , εκφράζει την πιθανότητα απόρριψης μιας αληθινής μηδενικής υπόθεσης. Επειδή το να απορριφθεί μια αληθινή μηδενική υπόθεση αποτελεί σφάλμα, είναι λογικό να ζητήσουμε μικρή πιθανότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης όταν αυτή αληθεύει. Για το λόγο αυτόν θα επιλέξουμε μια μικρή τιμή για το α . Οι πιο συχνά επιλεγόμενες τιμές του α είναι 0,05, 0,01, και 0,001.

Το σφάλμα της λαθεμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης λέγεται *σφάλμα τύπου I*. Το σφάλμα που γίνεται όταν δεχθούμε μια εσφαλμένη μηδενική υπόθεση λέγεται *σφάλμα τύπου II*, και η πιθανότητα να συμβεί συμβολίζεται με β . Όλες οι δυνατές περιπτώσεις μιας στατιστικής απόφασης δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

		Πραγματική κατάσταση	
		H_0 αληθεύει	H_0 εσφαλμένη
Στατιστική απόφαση	Απόρριψη H_0	Σφάλμα τύπου I	Σωστή απόφαση
	Αποδοχή H_0	Σωστή απόφαση	Σφάλμα τύπου II

Γενικά δεν ασκείται έλεγχος πάνω στο β , είναι γνωστό όμως ότι είναι μεγαλύτερο από το α . Στη συνέχεια της πορείας ενός ελέγχου εκτελείται ο υπολογισμός της τιμής του κριτηρίου ελέγχου. Ο υπολογισμός στηρίζεται στα δεδομένα του δείγματος. Δηλ. στην περίπτωση του κριτηρίου Z , στο οποίο αναφερόμαστε παραπάνω, υπολογίζεται ο μέσος του δείγματος $\bar{X}$ και αντικαθίσταται στον τύπο μαζί με το μέγεθος του δείγματος n και τις γνωστές τιμές μ_0 και σ .

Η στατιστική απόφαση συνίσταται στη απόρριψη ή μη της μηδενικής υπόθεσης. Απορρίπτεται, αν η τιμή του κριτηρίου που υπολογίσαμε περιλαμβάνεται στην περιοχή απόρριψης, και δεν απορρίπτεται αν η τιμή ανήκει στην περιοχή αποδοχής.

Αν η H_0 απορριφθεί, συμπεραίνουμε ότι η H_1 αληθεύει. Αν η H_0 δεν απορριφθεί, συμπεραίνουμε ότι η H_0 μπορεί να αληθεύει. Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι εκτελούμε ένα στατιστικό έλεγχο ακολουθώντας τα παρακάτω τέσσερα βήματα:

1. Διατυπώνουμε τη μηδενική και εναλλακτική υπόθεση και καθορίζουμε το επίπεδο σημαντικότητας α .
2. Αφού επιλέξουμε το κατάλληλο κριτήριο ελέγχου, με τη βοήθεια της κατανομής του κριτηρίου και του επιπέδου α **καθορίζουμε τον κανόνα απόφασης** βρίσκοντας τις κρίσιμες τιμές που οριοθετούν την περιοχή απόρριψης και «αποδοχής» της H_0 .
3. Υπολογίζεται η τιμή του κριτηρίου με τη βοήθεια των δεδομένων του δείγματος.
4. Συγκρίνεται η τιμή του κριτηρίου με τις κρίσιμες τιμές δηλ. διαπιστώνουμε κατά πόσο η τιμή που υπολογίσαμε ανήκει στην περιοχή απόρριψης. Αν η τιμή του κριτηρίου ανήκει στη περιοχή απόρριψης απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και γίνεται δεκτή η εναλλακτική. Στην περίπτωση που η τιμή βρίσκεται στην περιοχή αποδοχής λέμε ότι η μηδενική υπόθεση μπορεί να ισχύει.

6.9 Έλεγχος υποθέσεων για το μέσο του πληθυσμού

Διακρίνουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις συνθηκών :

1. Διαθέτουμε δείγμα από κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό με γνωστή διασπορά.
2. Το δείγμα προέρχεται από κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό με άγνωστη διασπορά.
3. Ο πληθυσμός δεν είναι κανονικά κατανεμημένος.

Στις 1 και 2 μπορεί να αναχθούν περιπτώσεις κατανομών που δεν απέχουν πολύ από την κανονική κατανομή.

Όταν έχουμε πληθυσμό από κανονική κατανομή και η διασπορά του πληθυσμού είναι γνωστή, το κριτήριο για τον έλεγχο της $H_0 : \mu = \mu_0$ είναι :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (6.4)$$

το οποίο όταν η H_0 αληθεύει ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.

Για την περίπτωση 2, ο έλεγχος της H_0 γίνεται με το κριτήριο

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \quad (6.5)$$

που ακολουθεί τη Student's t κατανομή με $v - 1$ βαθμούς ελευθερίας όπως είδαμε στην παράγραφο 6.6 για την περίπτωση της εκτίμησης του μέσου για μικρά δείγματα.

Για την περίπτωση 3, αν το δείγμα μας είναι μεγάλο, χρησιμοποιούμε το συμπέρασμα του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Με την διασπορά του πληθυσμού γνωστή παίρνουμε το κριτήριο της (6.1.) . Αν η διασπορά είναι άγνωστη, χρησιμοποιούμε την εκτίμησή της που γίνεται από το δείγμα. Έτσι το κριτήριο ελέγχου για την $H_0 : \mu = \mu_0$ είναι:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{v}} \quad (6.6)$$

Παράδειγμα 5^ο:

Θα γίνει έλεγχος της υπόθεσης ότι το δείγμα των 60 νηπίων για τα οποία διαθέτουμε τις τιμές στο τεστ δεξιοτήτων προέρχεται από πληθυσμό με μέσο όρο $\mu = 14$.

Από τις τιμές που διαθέτουμε υπολογίσθηκαν : $\bar{x} = 12,15$ και $s = 5,12$.

Επίσης, μια επισκόπηση της γραφικής παράστασης της κατανομής των τιμών του δείγματος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα δεδομένα προέρχονται από πληθυσμό που φαίνεται να μην ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Απάντηση

1. Οι στατιστικές υποθέσεις είναι:

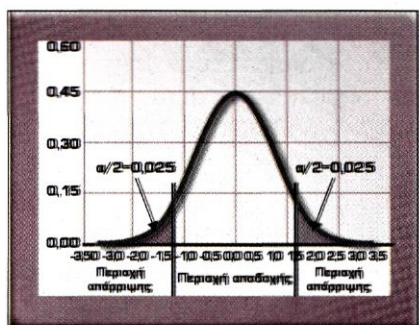
$$H_0 : \mu = 14$$

$$H_1 : \mu \neq 14$$

2. Το κριτήριο ελέγχου που θα χρησιμοποιηθεί αφού η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι άγνωστη, είναι : $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{v}}$. Ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχεται

το δείγμα με $v=60 > 30$ δεν είναι κανονικός αλλά σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα, το παραπάνω κριτήριο ελέγχου είναι το z , δηλαδή ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέσο 0, αν η μηδενική υπόθεση αληθεύει. Επιλέγουμε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,05$. Με βάση αυτό το επίπεδο θα καθορισθούν οι δύο περιοχές : απόρριψης και μη απόρριψης της H_0 . Είναι προφανές ότι, τιμές σημαντικά μεγαλύτερες από το 14 ή τιμές σημαντικά μικρότερες απ' αυτό, θα προκαλούσαν την απόρριψη της H_0 . **Αυτές λοιπόν οι ακραίες τιμές, θέλουμε να αποτελούν την περιοχή απόρριψης. Το πόσο ακραία πρέπει να είναι μια**

τιμή, για να ανήκει στην περιοχή απόρριψης, καθορίζεται από το α . Επειδή η περιοχή απόρριψης αποτελείται από δύο μέρη, πρέπει ένα μέρος του α να σχετισθεί με μεγάλες τιμές, ενώ το υπόλοιπο με μικρές. Φαίνεται λογικό να διαιρέσουμε το α σε ίσα μέρη, δηλαδή να σχετισθεί το $\alpha/2=0,025$ με τις μικρές ακραίες τιμές και το άλλο $\alpha/2=0,025$ με τις μεγάλες ακραίες τιμές. Ποια τιμή του κριτηρίου ελέγχου Z είναι τόσο μεγάλη, ώστε η πιθανότητα να ληφθεί μια τιμή μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν είναι 0,025;



Σχ. 6.3
Περιοχές αποδοχής και απόρριψης για επίπεδο
σημαντικότητας α

Είναι η τιμή, που αφήνει αριστερά της το 0,975 της περιοχής που ορίζει η καμπύλη της κατανομής και ο άξονας z . Ανατρέχουμε στον πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής (Πίνακας Β του παραρτήματος) και βρίσκουμε την τιμή 1,96. Στον ίδιο πίνακα βλέπουμε ότι η τιμή κάτω απ' την οποία μπορεί να βρεθεί το z , με πιθανότητα 0,025, είναι η -1,96.

Οι δύο τιμές που οριοθετούν τις περιοχές αποδοχής και απόρριψης, λέγονται **κρίσιμες τιμές**. Η περιοχή αποδοχής είναι το διάστημα $(-1,96, 1,96)$, ενώ οι τιμές απόρριψης βρίσκονται έξω απ' αυτό το διάστημα, δηλαδή $z \geq 1,96$ ή $z \leq -1,96$ (Σχ. 6.3.)

3. Υπολογισμός της τιμής για το κριτήριο ελέγχου μετά την αντικατάσταση των στατιστικών που υπολογίστηκαν από το δείγμα :

$$z = \frac{12,15 - 14}{\frac{5,12}{\sqrt{60 - 1}}} = \frac{-1,85}{\frac{5,12}{7,68}} = \frac{-1,85}{0,67} = -2,76$$

4. Απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση αφού η τιμή -2,76 ανήκει στην περιοχή απόρριψης. Βασιζόμενοι στα διαθέσιμα δεδομένα, συμπεραίνουμε ότι ο μέσος όρος των τιμών του πληθυσμού από τον οποίο προέρχεται το δείγμα, διαφέρει απ' το 14 και μάλιστα ισχύει $\mu < 14$.

Σημείωση: Για μικρά δείγματα που προέρχονται από πληθυσμούς των οποίων η κατανομή διαφέρει σημαντικά απ' την κανονική, γίνεται χρήση των *μη παραμετρικών μεθόδων*.

6.10 Μονόπλευρος - αμφίπλευρος έλεγχος υπόθεσης

Ο έλεγχος υπόθεσης που μελετήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, αποτελεί ένα παράδειγμα *αμφίπλευρου ελέγχου*. Ονομάζεται έτσι, επειδή η περιοχή απόρριψης της H_0 , βρίσκεται και στα δύο άκρα της κατανομής. Ένας έλεγχος μπορεί να είναι *μονόπλευρος*, όταν η περιοχή απόρριψης τοποθετείται στη μια ή την άλλη άκρη της κατανομής. Η απόφαση σχετικά με τον έλεγχο που θα επιλέξουμε εξαρτάται από τη φύση της ερευνητικής υπόθεσης.

Αν στο παράδειγμα της παρ. 6.9, ο ερευνητής είχε την υπόθεση ότι μετά από κάποια παρέμβαση θα έπρεπε να βελτιώνεται ο βαθμός δεξιότητας των νηπίων θα μπορούσε έχει το ερώτημα : ισχύει ότι $\mu > 14$; Τότε, για να απαντήσουμε θετικά θα πρέπει να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση $\mu \leq 14$. Ας ακολουθήσουμε τη διαδικασία των 4 βημάτων δεχόμενοι ότι τα διαθέσιμα δεδομένα από το δείγμα είναι τα ίδια μ' αυτά του παραδείγματος 5. Οι υποθέσεις είναι :

1. $H_0 : \mu \leq 14$, $H_1 : \mu > 14$. Η ανισότητα της μηδενικής υπόθεσης, σημαίνει ότι αυτή αποτελείται από άπειρες άλλες υποθέσεις. Ο έλεγχος γίνεται μόνο για το σημείο της ισότητας $\mu = 14$. Αν απορριφθεί για το σημείο αυτό η H_0 , τότε απορρίπτεται για κάθε άλλη τιμή του μ της μηδενικής υπόθεσης.
2. Το κριτήριο ελέγχου, είναι το ίδιο μ' αυτό του παραδείγματος 5, δηλ. το Z που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή

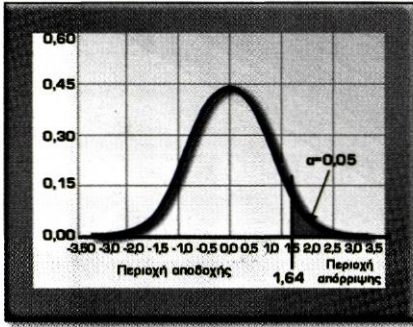
Για τον κανόνα απόφασης θα θέσουμε πάλι $\alpha = 0,05$. Στον καθορισμό της περιοχής απόρριψης, θα αναρωτηθούμε για το μέγεθος των τιμών που θα οδηγήσουν στην απόρριψη της H_0 .

Εξετάζοντας τις υποθέσεις που τέθηκαν στο προηγούμενο βήμα, συμπεραίνουμε ότι, πολύ μεγάλες τιμές θα οδηγούσαν σε απόρριψη της H_0 . Η περιοχή απόρριψης, βρίσκεται στο δεξί άκρο του άξονα z της καμπύλης κατανομής. Σ' αυτή την περίπτωση, ολόκληρο το α , θα τοποθετηθεί στο χαμηλότερο άκρο της κατανομής. Συμβουλευόμαστε τον πίνακα της τυπικής κανονικής κατανομής (Παράρτημα-Πίνακας Β) και βρίσκουμε ότι : η τιμή του z , αριστερά της οποίας έχουμε το 0,05 της περιοχής κάτω απ' την καμπύλη της κατανομής, είναι η - 1,645.

Το σχέδιο απόφασης συνίσταται στο να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση αν η υπολογιζόμενη από τα δεδομένα του δείγματος τιμή του κριτηρίου ελέγχου είναι μεγαλύτερη ή ίση από -1,645. (Σχήμα 6.4)

1. Όπως στην 6.8. υπολογίζουμε την τιμή του κριτηρίου και έχουμε: $z = -2,76$.

2. Στατιστική απόφαση: Δεν μπορεί να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση αφού έχουμε $-2,76 < 1,645$ άρα δεχόμαστε ότι μπορεί να ισχύει ότι $\mu \leq 14$ και συνεπώς τα δεδομένα του δείγματος δεν υποστηρίζουν την ερευνητική υπόθεση για βελτίωση του βαθμού δεξιότητας των νηπίων.



Σχ. 6.4 Περιοχές αποδοχής και απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης σε μονόπλευρο έλεγχο και επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,05$ για την κατανομή του κριτηρίου z .

6.11 Έλεγχος διαφοράς ανάμεσα σε δυο μέσους

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι επιθυμητή η σύγκριση των μέσων δυο πληθυσμών με τη βοήθεια δεδομένων δύο δειγμάτων που προέρχονται από τους πληθυσμούς αυτούς. Για παράδειγμα, ένας ερευνητής θέλει να αποφασίσει κατά πόσο υπάρχει πραγματική διαφορά ανάμεσα στη μέση επίδοση των μαθητών που διδάσκονται Φυσική με τη βοήθεια λογισμικού που προσομοιώνει τα πειράματα και με τη βοήθεια πραγματικών πειραμάτων. Αν οι μέ-

σοι δυο δειγμάτων που προέρχονται από τους πληθυσμούς αυτούς είναι 14,3 και 13,9 αντίστοιχα τότε οι υποθέσεις που πρέπει να ελεγχθούν είναι : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ και $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Ανάλογα με το αν θέλουμε να στηρίξουμε την υπόθεση ότι ο μέσος μ_1 ενός πληθυσμού είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από το μέσο μ_2 ενός άλλου πληθυσμού διατυπώνουμε κατάλληλα τις στατιστικές υποθέσεις :

$$H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \text{ και } H_1 : \mu_1 < \mu_2 \quad \text{ή} \quad H_0 : \mu_1 \leq \mu_2 \text{ και } H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

Η θεωρία που θα χρησιμοποιηθεί στη διεξαγωγή των ελέγχων στην περίπτωση των παραπάνω υποθέσεων είναι η ακόλουθη:

Αν $\bar{X}_1$ και $\bar{X}_2$ είναι οι δειγματικοί μέσοι που προέρχονται από δύο μεγάλα και ανεξάρτητα μεταξύ τους τυχαία δείγματα, μεγέθους v_1 και v_2 , η δειγματική κατανομή του στατιστικού $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ είναι κατά προσέγγιση κανονική και έχει μέσο

$\mu_1 - \mu_2$ και τυπική απόκλιση την $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{v_1} + \frac{\sigma_2^2}{v_2}}$, όπου μ_1 , μ_2 , σ_1 και σ_2 είναι οι μέσοι

και οι τυπικές αποκλίσεις των πληθυσμών από τους οποίους προέρχονται τα δύο δείγματα. Η τυπική απόκλιση της κατανομής αυτής ονομάζεται **τυπικό σφάλμα της διαφοράς των μέσων**.

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν για δείγματα με οποιοδήποτε μέγεθος αν οι πληθυσμοί ακολουθούν κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή.

Με τον όρο ανεξάρτητα δείγματα θέλουμε να δηλώσουμε πως ο σχηματισμός του ενός δείγματος δεν εξαρτάται από την επιλογή του άλλου. Για παράδειγμα στην περίπτωση της σύγκρισης των δυο φύλων ως προς τις ετήσιες δαπάνες για ρουχισμό δεν θα είχαμε ανεξάρτητα δείγματα αν επιλέγαμε τυχαία ένα δείγμα ανδρών και οι σύζυγοι των ανδρών αυτών αποτελούσαν το δείγμα των γυναικών.

Θα διακρίνουμε και εδώ τρεις περιπτώσεις όπως στην 6.9:

1. Δείγματα από κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς με γνωστές τις διασπορές των πληθυσμών.

Σύμφωνα με τα παραπάνω θεωρητικά συμπεράσματα το παρακάτω πηλίκο ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{v_1} + \frac{\sigma_2^2}{v_2}}} \quad (6.8)$$

και το κριτήριο για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ή $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ είναι

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{v_1} + \frac{\sigma_2^2}{v_2}}}$$

2. Δείγματα από κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς με άγνωστες τις διασπορές.

Εδώ θα γίνει η διάκριση για την περίπτωση που είναι ίσες οι διασπορές των δύο πληθυσμών και την περίπτωση που είναι άνισες.

α. Οι διασπορές των δύο πληθυσμών είναι ίσες.

Όταν οι διασπορές είναι *άγνωστες* αλλά *ίσες*, τότε χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σχέση για να δώσουμε μια εκτίμηση της διασποράς:

$$S_p^2 = \frac{(v_1 - 1)S_1^2 + (v_2 - 1)S_2^2}{v_1 + v_2 - 2}$$

Το κριτήριο ελέγχου, γίνεται τώρα:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{v_1} + \frac{S_p^2}{v_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}} \quad (6.9)$$

που αποδεικνύεται ότι ακολουθεί την κατανομή t με $v_1 + v_2 - 2$ βαθμούς ελευθερίας, με την προϋπόθεση ότι η H_0 αληθεύει. Το συγκεκριμένο κριτήριο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την περίπτωση των μικρών δειγμάτων ($v_1 < 30$ και $v_2 < 30$) όπου, η εκτίμηση της διασποράς οδηγεί σε απόκλιση της κατανομής του πηλίκου (6.5) από την κανονική κατανομή.

β. Οι διασπορές των πληθυσμών είναι άνισες.

Αν δεχθούμε ότι οι διασπορές των πληθυσμών είναι άνισες, πάλι θα χρησιμοποιηθεί κατανομή t . Εδώ η τιμή t υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{v_1} + \frac{S_p^2}{v_2}}} \quad (6.10)$$

Οι βαθμοί ελευθερίας δίνονται από τη μικρότερη των τιμών $v_1 - 1$ και $v_2 - 1$.

Ο έλεγχος της ισότητας των διασπορών

* (Η απόφασή μας για τη χρήση του κατάλληλου στατιστικού μπορεί να στηριχτεί στο αποτέλεσμα του ελέγχου με υποθέσεις: $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ και $H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$, και τη χρήση του

στατιστικού $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$.) *

Για τα προβλήματα που συναντάμε παρακάτω, δεχόμαστε την ισότητα των διασπορών.

3. Δείγματα από πληθυσμούς που δεν κατανέμονται κανονικά.

Σ' αυτή την περίπτωση, το αποτέλεσμα του κεντρικού οριακού θεωρήματος ισχύει αν το μέγεθος των δειγμάτων είναι μεγάλο. Τότε κάνουμε χρήση του κριτηρίου :

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{v_1} + \frac{\sigma_2^2}{v_2}}}$$

που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή αν αληθεύει η H_0 . Αν οι διασπορές των πληθυσμών είναι γνωστές μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Αν είναι άγνωστες, αντικαθιστούνται από τις εκτιμήσεις τους που υπολογίζονται από τις τιμές των δειγμάτων και το κριτήριο είναι :

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{v_1} + \frac{S_2^2}{v_2}}}$$

Παράδειγμα 6^ο:

Σαν παράδειγμα θα συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα των δυο μεθόδων διδασκαλίας Φυσικής: Η διδασκαλία στη μέθοδο Α, γίνεται με τη βοήθεια προγραμμάτων προσομοίωσης σε υπολογιστή ενώ στην μέθοδο Β, με πραγματικά πειράματα. Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα δεδομένα από δυο τυχαία και ανεξάρτητα δείγματα μαθητών που διδάχτηκαν με διαφορετική μέθοδο το κάθε ένα. Επισκόπηση του διαγράμματος των κατανομών των δειγμάτων δεν έδειξε αξιόλογη απόκλιση των κατανομών από την κανονική.

Μέθοδος Α	Μέθοδος Β
$v_1 = 17$	$v_2 = 16$
$\bar{X}_1 = 6,85$	$\bar{X}_2 = 2,85$
$S_1^2 = 3,04$	$S_2^2 = 0,99$

Απάντηση

Θα ακολουθήσουμε και εδώ τον έλεγχο με τη βοήθεια τεσσάρων βημάτων που είδαμε στην περίπτωση του ελέγχου για το μέσο όρο του πληθυσμού.

1. Οι στατιστικές υποθέσεις μας είναι $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ και $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ και θα γίνει αμφίπλευρος έλεγχος σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$

2. Το κριτήριο που θα χρησιμοποιηθεί είναι το t αφού τα δείγματα είναι μικρά (<30), οι τυπικές αποκλίσεις των συγκρινόμενων πληθυσμών είναι άγνωστες και οι πληθυσμοί μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση κανονικοί με ίσες διασπορές. Συνεπώς θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο t για ίσες διασπορές πληθυσμών :

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} \text{ με } n_1 + n_2 - 2 \text{ βαθμούς ελευθερίας.}$$

Ανατρέχοντας στον πίνακα της t -κατανομής (Παράρτημα-Πίνακας Γ) για $14+16-2=28$ βαθμούς ελευθερίας βρίσκουμε $t_{0,25} = 2,048$. Συνεπώς η μηδενική υπόθεση της μη διαφοράς θα απορριφθεί αν η τιμή του κριτηρίου είναι έξω από το διάστημα $[-2,048 \ 2,048]$

3. Υπολογισμός της τιμής του κριτηρίου γίνεται αφού πρώτα υπολογιστεί η εκτίμηση της διασποράς $s_p^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2} = 3,017143 \approx 3,02$ και στη συνέχεια βρί-

$$\text{σκουμε } t = \frac{(14,3 - 13,9)}{\sqrt{\frac{3,02}{14} + \frac{3,02}{16}}} = 0,63$$

4. Αφού η τιμή του κριτηρίου 0,63 που υπολογίστηκε από τα δεδομένα των δειγμάτων που διαθέτουμε βρίσκεται μέσα στο διάστημα $[-2,048 \ 2,048]$, δεν μπορεί να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση και συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε πως τα δεδομένα μας δεν υποστηρίζουν την ύπαρξη διαφοράς στην μέση επίδοση μαθητών που διδάσκονται Φυσική με τις δύο διαφορετικές μεθόδους Α και Β.

6.12 Έλεγχος μέσων σε ζεύγη τιμών

Μέχρι τώρα, στον έλεγχο της ισότητας των μέσων όρων δύο πληθυσμών, τα δείγματα που μελετούσαμε, ήταν ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Μια μέθοδος που εφαρμόζεται συχνά, με στόχο να ελέγξει την αποτελεσματικότητα μιας πειραματικής διαδικασίας (π.χ. διδακτικής μεθόδου, θεραπευτικής αγωγής κ.λ.π.), είναι αυτή που χρησιμοποιεί σχετιζόμενες παρατηρήσεις. Ο έλεγχος που στηρίζεται σε τέτοιου τύπου δεδομένα λέγεται *έλεγχος συγκρίσεων κατά ζεύγη*.

Παρατηρήσεις κατά ζεύγη, μπορεί να ληφθούν με διάφορους τρόπους. Είναι δυνατό να γίνουν μετρήσεις για τα ίδια υποκείμενα πριν και μετά από κάποια διαδικασία παρέμβασης. Σε ζεύγη διδύμων μπορεί να δοθεί τυχαία θεραπεία δύο ειδών έτσι ώστε τα μέλη ενός ζεύγους να υπόκεινται σε διαφορετικές θεραπείες.

Στην περίπτωση αυτή, αντί να εκτελέσουμε την ανάλυση με μεμονωμένες παρατηρήσεις, θα χρησιμοποιήσουμε τη διαφορά των τιμών του ζεύγους, ως μεταβλητή που μπορεί να μελετηθεί.

Ας δεχτούμε ότι οι δειγματικές διαφορές αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα από έναν κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό διαφορών d . Τότε το κριτήριο ελέγχου της υπόθεσης $H_0: \mu_d = 0$ για το μέσο όρο του πληθυσμού των διαφορών μ_d , είναι:

$$t = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad (6.11)$$

όπου $\bar{d}$ είναι ο μέσος του δείγματος των διαφορών των ζευγών και S_d είναι η τυπική απόκλιση των διαφορών του δείγματος.

Όταν αληθεύει η μηδενική υπόθεση H_0 , το κριτήριο ελέγχου ακολουθεί κατανομή Student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Στην περίπτωση που οι διαφορές δεν είναι κανονικά κατανεμημένες, κάνουμε χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος αν το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο ($n > 30$).

Παράδειγμα 7^ο :

Θα μελετηθεί η μεταβολή των βαθμών σε ακουστικο-φωνητικό test (test στο οποίο παιδιά νηπιακής ηλικίας καλούνται να τραγουδήσουν μια μελωδία που μόλις άκουσαν).

Από τα δεδομένα υπολογίζουμε τις διαφορές:

d = βαθμός μετά τη διδασκαλία – βαθμός πριν τη διδασκαλία

των 24 αυτών διαφορών υπολογίζεται η μέση τιμή : $\bar{d} = 1,15$ και η τυπική απόκλιση $s_d = 1,48$.

Απάντηση

Η διαδικασία ελέγχου της υπόθεσης είναι :

1. Διατύπωση των στατιστικών υποθέσεων. Επειδή ο ερευνητής ενδιαφέρεται για τη βελτίωση της επίδοσης των παιδιών στο ακουστικο-φωνητικό test, οι υποθέσεις μας είναι: $H_0: \mu_d \leq 0$ και $H_1: \mu_d > 0$.

2. Θα δεχτούμε ότι οι παρατηρούμενες διαφορές d , αποτελούν τυχαίο δείγμα από έναν κανονικά κατανεμημένο πληθυσμό διαφορών. Επειδή το δείγμα είναι μικρό και η διασπορά του πληθυσμού των διαφορών είναι άγνωστη και εκτιμάται

από τα δεδομένα του δείγματος ο έλεγχος πρέπει να στηριχτεί στην t κατανομή που στην συγκεκριμένη περίπτωση έχει $24-1=23$ βαθμούς ελευθερίας. Αφού το επιθυμητό επίπεδο σημαντικότητας είναι 0,05, για 23 βαθμούς ελευθερίας από τον πίνακα της t -κατανομής, βρίσκεται η κρίσιμη τιμή 1,7139. Η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης είναι η $t \geq 1,7139$.

3. Τέλος χρησιμοποιούνται οι $\bar{d} = 1,15$ και $S_d = 1,48$ για τις 24 διαφορές. Υπολογισμός της τιμής του t :

$$t = \frac{1,15}{1,48/\sqrt{24}} = \frac{1,15}{1,48/4,9} = \frac{1,15}{0,3} = 3,83$$

4. Στατιστική απόφαση: Απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση αφού $t = 3,83 > 1,7139$, και γίνεται δεκτή η εναλλακτική δηλ. $\mu_d > 0$, που ισοδυναμεί με την υπόθεση

Μετά τη διδασκαλία > Μπριν τη διδασκαλία. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διδασκαλία αρμονίου βελτιώνει σημαντικά την επίδοση στην ακουστική-φωνητική δοκιμασία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Απαντήστε με ναι ή όχι στις παρακάτω ερωτήσεις.

Αν κατασκευάσουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης με τα δεδομένα ενός συγκεκριμένου τυχαίου δείγματος, υπάρχει 95% πιθανότητα ο μέσος του πληθυσμού να βρίσκεται μέσα σ' αυτό το διάστημα.

- Αν κατασκευαστεί ένας μεγάλος αριθμός 95% διαστημάτων εμπιστοσύνης για το μέσο με τη βοήθεια των δειγματικών μέσων από τα αντίστοιχα τυχαία δείγματα ο μέσος του πληθυσμού θα βρίσκεται μέσα στο 95% αυτών των διαστημάτων.
- Αν το μέγεθος του δείγματος ξεπερνά το 30 τότε υπάρχει 95% πιθανότητα ο μέσος του πληθυσμού να είναι ίσος με το δειγματικό μέσο.
- Το 95% διάστημα γύρω από δοθέντα δειγματικό μέσο είναι ευρύτερο από το 90% διάστημα γύρω από τον ίδιο μέσο.
- Προκειμένου να δείχτεί πως $\mu = \mu_0$ με σφάλμα τύπου I ίσο με 0,05 πρέπει να επιλέξουμε ένα δείγμα και να αποτύχουμε στην απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης $H_0: \mu = \mu_0$ χρησιμοποιώντας $\alpha = 0,05$
- Για να βρεθεί η κρίσιμη τιμή ενός δίπλευρου ελέγχου με σφάλμα τύπου I ίσο με 0,04, πρέπει να αναζητηθεί η z τιμή για την αντίστοιχη περιοχή 0,48 στον πίνακα της τυπικής κατανομής του παραρτήματος.

στ) Εάν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$ τότε θα απορριφθεί και στο επίπεδο $\alpha=0,01$

2. Η ασυμμετρία της δειγματικής κατανομής του μέσου δειγμάτων μεγέθους n που προέρχονται από ένα πληθυσμό με ασύμμετρη κατανομή εξαρτάται από:

- α) το μέγεθος των δειγμάτων που τη σχηματίζουν
- β) το μέγεθος του μέσου του πληθυσμού μ , του πληθυσμού.

3. Εάν απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας για να είναι δυνατή η εκτίμηση σημείου του μέσου ενός πληθυσμού με τη βοήθεια ενός δείγματος από τον πληθυσμό αυτόν, ποιο από τα παρακάτω είναι απαραίτητο:

- α) Το μέγεθος του δείγματος ≥ 30 .
- β) Ο πληθυσμός κανονικός.
- γ) Το δείγμα είναι τυχαίο.
- δ) Η διασπορά του πληθυσμού γνωστή. $\alpha=0,05$ τότε θα απορριφθεί και στο επίπεδο $\alpha=0,01$

4. Για να είναι δυνατή η εκτίμηση με διάστημα εμπιστοσύνης του μέσου ή ο έλεγχος υπόθεσης για το μέσο ενός μη κανονικού πληθυσμού με τη βοήθεια ενός δείγματος από τον πληθυσμό αυτόν ποια από τα παρακάτω είναι απαραίτητα:

- α) Το μέγεθος του δείγματος ≥ 30 .
- β) Η διασπορά του πληθυσμού γνωστή.
- γ) Το δείγμα είναι τυχαίο.

5. Στην εκτίμηση του μέσου ή στον έλεγχο για το μέσο ενός κανονικού πληθυσμού με διάστημα εμπιστοσύνης η χρήση της κατανομής t είναι απαραίτητη όταν:

- α) Το μέγεθος του δείγματος < 30 .
- β) Η διασπορά του πληθυσμού άγνωστη.

6. Σε ένα στατιστικό έλεγχο για το μέσο μ , η μηδενική υπόθεση απορρίφθηκε. Βασιζόμενοι σ' αυτό το συμπέρασμα, ποιο από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύει;

- α) Έγινε σφάλμα τύπου I.
- β) Έγινε σφάλμα τύπου II
- γ) Δεν είναι δυνατόν να έχουν γίνει τα σφάλματα και των δύο τύπων.
- δ) Είναι αδύνατο να μην έχει συμβεί ούτε το σφάλμα τύπου I ούτε το σφάλμα τύπου II.
- ε) Κατά πόσο έγινε ένα σφάλμα δεν είναι γνωστό αλλά αν έγινε κάποιο σφάλμα αυτό είναι τύπου I.
- στ) Κατά πόσο έγινε ένα σφάλμα δεν είναι γνωστό αλλά αν έγινε κάποιο σφάλμα αυτό είναι τύπου II.

7. Κατά τον έλεγχο υποθέσεων σχετικό με τη διαφορά των μέσων δυο μη κανονικών πληθυσμών με τη βοήθεια δύο δειγμάτων από του πληθυσμούς αυτούς σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι αδύνατη η εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος;

- α) $v_1=15$ και $v_2=40$
- β) σ_1, σ_2 άγνωστες
- γ) σ_1, σ_2 γνωστές
- δ) $v_1=30$ και $v_2=50$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δειγματική κατανομή του μέσου – εκτιμήσεις

1. Ας θεωρήσουμε ότι δόθηκε ένα τυποποιημένο τεστ Μαθηματικών στους μαθητές της Β' λυκείου. Η μεταβλητή X είναι ο βαθμός που πήραν οι μαθητές σ' αυτό το τεστ. Αυτή η εξέταση είχε ένα μέσο 720 μονάδες και μια τυπική απόκλιση 60 μονάδες. Ένα δείγμα 40 μαθητών έδωσε αυτή την εξέταση και ο δειγματικός μέσος είναι $\bar{x}=725,6$. Σχηματίστηκε η δειγματική κατανομή από τους μέσους τέτοιων δειγμάτων μεγέθους 40 μαθητών.
 - α) Να βρεθεί ο μέσος αυτής της δειγματικής κατανομής.
 - β) Να ευρεθεί η τυπική απόκλιση της δειγματικής κατανομής.
2. Ένας πληθυσμός έχει κανονική κατανομή με άγνωστο το μέσο μ και με τυπική απόκλιση $\sigma=5$. Ποια η πιθανότητα να βρίσκεται ο $\bar{X}$ μέσα σε μια μονάδα από το μέσο μ , εάν το n πάρει τις ακόλουθες τιμές: Α. $n=25$ Β. $n=100$ Γ. $n=225$
3. Τα παιδιά του νηπιαγωγείου έχουν ύψη τα οποία κατανέμονται κατά προσέγγιση κανονικά με μέσο 39 ίντσες και τυπική απόκλιση 2 ίντσες. Ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 25 έχει ληφθεί και υπολογίστηκε ο $\bar{X}$
 - α) Ποια είναι η πιθανότητα να βρίσκεται η τιμή αυτή μεταξύ 38,5 και 40 ιντσών;
 - β) Ποια είναι τα όρια του διαστήματος μέσα στο οποίο θα βρίσκεται το κεντρικό 90% των δειγματικών μέσων της δειγματικής κατανομής από δείγματα μεγέθους 100;
4. Ένας πληθυσμός έχει κανονική κατανομή με άγνωστο μέσο μ , και τυπική απόκλιση $\sigma=5$. Σχηματίζουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $n=25$ από τον πληθυσμό.
 - α) Να βρεθεί η πιθανότητα να βρίσκεται ο $\bar{X}$ σε διάστημα $(\mu-1, \mu+1)$. Δηλαδή να βρεθεί η $P(-1 < \bar{X} - \mu < 1)$.

- β) Αν η τυπική απόκλιση είναι 2,5 αντί για 5 να βρεθεί $P(-1 < \bar{X} - \mu < 1)$.
 γ) Αν η τυπική απόκλιση είναι 10 αντί για 5 να βρεθεί $P(-1 < \bar{X} - \mu < 1)$.
5. Τα 48 από τα 50 τυχαία δείγματα (δηλ. 96%) μεγέθους $n=5$, που λήφθηκαν από ένα πληθυσμό διασποράς $\sigma = 4$, διαφέρουν από τον μέσο μ του πληθυσμού λιγότερο από 3,5. Στηριζόμενοι στο κεντρικό οριακό θεώρημα, ποια είναι η πιθανότητα ώστε η διαφορά ενός δειγματικού μέσου από το μέσο του πληθυσμού να είναι μικρότερη από 3,5, όταν διαθέτουμε ένα τυχαίο δείγμα με $n=5$ και ο πληθυσμός είναι άπειρος με $\sigma = 4$;
6. Από τον πεπερασμένο πληθυσμό των αριθμών 5,6,7,8,9 και 10 παίρνουμε τυχαία δείγματα μεγέθους 2.
- α) Να δειχτεί ότι ο μέσος του πληθυσμού είναι $\mu = 7,5$ και η τυπική απόκλιση του $\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}}$
- β) Να κατασκευάσετε έναν πίνακα με τα 15 δυνατά δείγματα μεγέθους 2 που μπορούν να ληφθούν (χωρίς επανατοποθέτηση) και υπολογίστε τους μέσους τους
- γ) Να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα της 2 για να κατασκευαστεί η δειγματική κατανομή του μέσου για δείγματα μεγέθους 2 από τον δοθέντα πεπερασμένο πληθυσμό. Όλα τα δείγματα έχουν την ίδια πιθανότητα $1/15$ να επιλεγούν.
- δ) Να υπολογιστεί ο μέσος και η διασπορά της κατανομής που κατασκευάστηκε στο 3 και να επαληθευτεί το αποτέλεσμα με τη χρήση γνωστού θεωρήματος.
7. Ένας καθημερινός επιβάτης του μετρό αγοράζει φιστίκια, από την ίδια αυτόματη μηχανή του σταθμού, στο δρόμο του από τη δουλειά για το σπίτι κάθε απόγευμα. Τις τελευταίες 40 φορές ο επιβάτης πήρε τους παρακάτω αριθμούς φιστικιών κάθε φορά: 12, 10, 0, 5, 15, 16, 20, 3, 12, 0, 12, 10, 9, 11, 8, 13, 15, 16, 20, 18, 19, 20, 0, 14, 13, 15, 16, 15, 19, 11, 10, 10, 10, 3, 8, 2, 0, 0, 20, 12, και 12.
- Θεωρήστε αυτές τις 40 αγορές ως ένα δείγμα μεγέθους 40 από τον πληθυσμό.
- α) Ποιος είναι ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχεται το δείγμα;
- β) Να υπολογιστεί ο μέσος $\bar{X}$ του δείγματος.
- γ) Εκτιμήστε το μέσο μ του πληθυσμού.
- δ) Υπολογίστε την s για να εκτιμηθεί η τυπική απόκλιση του πληθυσμού.
- ε) Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα περιγράψτε την κατανομή των δειγματικών μέσων.
- στ) Εκτιμήστε το μέσο $\mu_{\bar{X}}$, της κατανομής των δειγματικών μέσων.

- ζ) Να βρεθεί μια εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της κατανομής των δειγματικών μέσων.

Έλεγχος για το μέσο μ ενός πληθυσμού

8. Ας θεωρήσουμε την παρακάτω μη μαθηματική κατάσταση σαν έλεγχο υπόθεσης. Κάποιος αγόρασε ένα αλεξίπτωτο που επιθεωρήθηκε από ειδικό του οποίου η μηδενική υπόθεση ήταν «αυτό το αλεξίπτωτο θα ανοίξει»
- α) Να εξηγηθεί το νόημα των τεσσάρων πιθανών αποτελεσμάτων που δίνονται στον πίνακα (να δοθεί η σελίδα του πίνακα σφαλμάτων).
 - β) Να περιγραφεί η σοβαρότητα των δυο πιθανών σφαλμάτων.
 - γ) Αν το σφάλμα τύπου I και τύπου II μπορούσαν να ελεγχθούν στατιστικά πια δυνάδα πιθανοτήτων θα προσπαθούσαμε να χρησιμοποιηθεί αν επρόκειτο να χρησιμοποιήσουμε το αλεξίπτωτο.
- 1. $\alpha=0,001$ και $\beta=0,10$
 - 2. $\alpha=0,05$ και $\beta=0,05$
 - 3. $\alpha=0,10$ και $\beta=0,001$
9. Να απαντηθούν τα παρακάτω:
- α) Αν η τιμή του στατιστικού του ελέγχου βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή ποια απόφαση πρέπει να ληφθεί;
 - β) Αν η τιμή του στατιστικού του ελέγχου δεν πέφτει στην κρίσιμη περιοχή ποια απόφαση πρέπει να ληφθεί;
 - γ) Αν το επίπεδο σημαντικότητας του ελέγχου είναι $\alpha = 0,001$ τι ισχύει για το σφάλμα τύπου I;
 - δ) Αν $\beta = 0,10$ τι ισχύει για το σφάλμα τύπου II
10. Να τεθούν η μηδενική και εναλλακτική υπόθεση που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της υπόθεσης που σχετίζεται με τις παρακάτω προτάσεις:
- α) Ο μέσος χρόνος των μαθητών που παρακολουθούν νυχτερινά τμήματα σε ένα κολέγιο ξεπερνά τα 21 χρόνια.
 - β) Το μέσο βάρος των πακέτων που αποστέλλονται από μια αεροπορική εταιρεία κατά τον τελευταίο μήνα ήταν μικρότερο από 8 κιλά.
 - γ) Η μέση ημερήσια θερμοκρασία κατά το μήνα Ιούλιο στη Ρόδο δεν είναι 30°C .

11. Να καθορίσετε τις κρίσιμες τιμές και περιοχή απόρριψης για το z που θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης σε δοθέν επίπεδο σημαντικότητας σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) $H_0 : \mu = 20$ ($\alpha = 0,10$)
 $H_1 : \mu \neq 20$
 - β) $H_0 : \mu \geq 12,5$ ($\alpha = 0,5$)
 $H_1 : \mu < 12,5$
 - γ) $H_0 : \mu \leq 21$ ($\alpha = 0,01$)
 $H_1 : \mu > 21$
12. Να βρεθούν οι κρίσιμες τιμές με τη βοήθεια του πίνακα της t -κατανομής
 Α. $t(24 : 0,05)$ Β. $t(9 : 0,10)$ Γ. $t(15 : 0,01)$ Δ. $t(60 : 0,025)$
13. Να βρεθεί το ποσοστό της t -κατανομής που βρίσκεται ανάμεσα στις παρακάτω τιμές:
- α) $d = \beta.ε. = 11$ με t από $-1,36$ έως $2,20$.
 - β) $d = \beta.ε. = 24$ με t από $-2,49$ έως $1,71$.
14. Σε μια πρόσφατη μελέτη που έγινε στην Ευρώπη διερευνήθηκαν οι επιπτώσεις στην υγεία από την πολύωρη εργασία μπροστά στην οθόνη ενός υπολογιστή. Βρέθηκε πως κατά μέσο όρο χρειάζονται 2,6 ώρες πριν από την εμφάνιση κάποιου συμπτώματος κόπωσης στα μάτια. Το αποτέλεσμα ενός παρόμοιου πειράματος, $\bar{X} = 2,8$ ώρες και $S = 0,5$ ώρες, στις Η.Π.Α., χρησιμοποιώντας ένα δείγμα μεγέθους $n = 100$ μπορεί να είναι ασυμβίβαστο με τα ευρωπαϊκά αποτελέσματα ; Μπορεί η διαφορά ανάμεσα στις 2,8 και 2,6 ώρες να θεωρηθεί σημαντική θεωρώντας την πρακτική αξία αυτής της διαφοράς ;
15. Πολλοί μαθητές ενός σχολείου θεωρούν ότι ο μέσος μαθητής πρέπει να ταξιδεύει τουλάχιστον 25 λεπτά για να φθάσει στο σχολείο κάθε μέρα. Ο διευθυντής του σχολείου πήρε ένα τυχαίο δείγμα από χρόνους διαδρομής προς το σχολείο 25 μαθητών. Το δείγμα είχε μέσο 18,5 και τυπική απόκλιση 9,6 λεπτά. Στηριζόμενος στα δεδομένα του δείγματος, μπορεί ο διευθυντής να απορρίψει τον ισχυρισμό των μαθητών ;
16. Ένας οικολόγος που εργάζεται στο δημόσιο τοποθετεί κρίκους στα πόδια ενός μεγάλου αριθμού ατόμων άγριας πάπιας με στόχο να μελετήσει τις μεταναστευτικές τους συνήθειες. Ο οικολόγος τοποθετεί κρίκους κατά μέσο όρο σε 50 πουλιά τη βδομάδα. Η κατανομή του αριθμού των πουλιών που σηματοδοτούνται είναι κατά προσέγγιση κανονική με τυπική απόκλιση 7 σηματοδεδειμένων

πουλιών. Ο προϊστάμενος περιοδικά ελέγχει τον αριθμό των πουλιών που σημαδεύονται.

- α) Ποια είναι η πιθανότητα κατά τον έλεγχο του προϊσταμένου κάποια εβδομάδα να έχουν σημαδευτεί λιγότερα από 40 πουλιά. (Ο αριθμός των πτηνών που σημαδεύονται είναι ακέραιος)
- β). Αν ο προϊστάμενος διαλέξει στην τύχη 36 βδομάδες από τα τρία τελευταία χρόνια ποια είναι η πιθανότητα να πάρει κατά μέσο όρο λιγότερο από 45 πάπιες σημαδεμένες κατά βδομάδα;
- γ). Μπορεί να υποστηριχτεί από τον προϊστάμενο πως ο μέσος αριθμός των σημαδεμένων πουλιών τη βδομάδα είναι μικρότερος από 50 όταν τα δεδομένα του τυχαίου δείγματος των 36 εβδομάδων δίνουν μέσο 45 και τυπική απόκλιση 8,5.

Έλεγχος για τη διαφορά των μέσων δύο πληθυσμών

17. Να καθορίσετε τις κρίσιμες τιμές για τον των παρακάτω υποθέσεων με την χρήση της z στατιστικής ελέγχου.
- α) $H_0 : \mu_A = \mu_B$ και $H_1 : \mu_A > \mu_B$ όταν και οι δύο τυπικές αποκλίσεις $\sigma = 15$ και $\alpha = 0,05$
- β) $H_0 : \mu_A = \mu_B$ και $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$ με $\sigma_A = 25$, $\sigma_B = 30$ και $\alpha = 0,05$.
- γ) $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$ και $H_1 : \mu_A - \mu_B < 0$ με $n_A = 42$, $n_B = 54$ και $\alpha = 0,02$
18. Η εκπρόσωπος ενός συλλόγου γυναικών επιθυμεί να υποστηρίξει τον ισχυρισμό ότι κατά το πρώτο έτος της απασχόλησής τους οι άνδρες επιστήμονες στην βιομηχανία πληρώνονται καλύτερα από τις γυναίκες που κάνουν την ίδια δουλειά. Για το σκοπό αυτό συνέλεξε δεδομένα από δυο τυχαία δείγματα όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	Άνδρες	Γυναίκες
Μέγεθος δείγματος	100	100
Δειγματικός μέσος	250.000 δρχ.	225.000 δρχ.
Εκτίμηση της τυπικής	7.500 δρχ.	6.800 δρχ.
απόκλισης του πληθυσμού με βάση		
την τυπική απόκλιση του δείγματος S		

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα είναι δυνατό να υποστηρίξει τον ισχυρισμό της με $\alpha=0,05$ η εκπρόσωπος.

19. Σε ένα πείραμα που εκτελέστηκε με μεγάλη προσοχή ένας ερευνητής ανέπτυξε 35 φυτά του είδους «ήλιος» διαβάζοντας το ίδιο τρυφερό ποίημα σε κάθε φυτό κατά τη διάρκεια του ποτίσματος. Ο ερευνητής μεγάλωσε 35 άλλα φυτά «ήλιος» χωρίς να τους μιλά καθόλου. Μετά από ένα μήνα τα αποτελέσματα ήταν τα ακόλουθα. Για τα φυτά στα οποία μιλούσε η μέση ανάπτυξη ήταν 10,1 εκατοστά και $s=1$ εκατοστό. Για τα άλλα φυτά η μέση ανάπτυξη ήταν 9,8 εκατοστά και $s=1$ εκ. Τα παραπάνω δεδομένα μπορούν να υποστηρίξουν σε $\alpha=0,05$ πως η απαγγελία του ποιήματος συνδέεται με μεγαλύτερη ανάπτυξη ;
20. Από τη συμμετοχή 10 ενηλίκων σε ένα πρόγραμμα ελάττωσης του βάρους ελήφθησαν τα δεδομένα. Τα βάρη τους κατεγράφησαν πριν και μετά το πρόγραμμα. Για τις δέκα διαφορές $\bar{x}=5,8$ κιλά με $s=5$ κιλά. Χρησιμοποιώντας $\alpha=0,05$ μπορεί να υποστηριχτεί ότι το πρόγραμμα έχει αποτέλεσμα ;
21. Ένας εκπαιδευτικός επινόησε ένα νέο τρόπο διδασκαλίας της ανάγνωσης. Ένα σύνολο 40 μαθητών χωρίστηκε σε ζεύγη σύμφωνα με την αναγνωστική τους ικανότητα και τέλος τα άτομα καθενός ζεύγους τοποθετήθηκαν τυχαία σε δύο διαφορετικές ομάδες. Οι είκοσι μαθητές της πρώτης ομάδας διδάχτηκαν με τη μέθοδο του εκπαιδευτικού (μέθοδος Α) και στην δεύτερη με το συνήθη τρόπο (μέθοδος Β). Στο τέλος του μαθήματος υπολογίστηκε διαφορά D (βαθμός με μέθοδο Α – βαθμός με μέθοδο Β) ανάμεσα στην αναγνωστική ικανότητα το μελών κάθε ζεύγους μαθητών. Η μέση διαφορά είναι $-3,6$ με $s=4$. Μπορεί να υποστηριχτεί ότι η μέθοδος Α είναι σημαντικά διαφορετική ; ($\alpha=0,05$).
22. Προκειμένου να ελεγχθεί ποια μάρκα βενζίνης δίνει περισσότερα χιλιόμετρα ανά λίτρο μια εταιρεία δοκίμασε την βενζίνη Α σε δέκα οχήματα και την βενζίνη Β σε 10 άλλα παρόμοια οχήματα. Τα οχήματα με την βενζίνη Α έκαναν κατά μέσο 16,3 χλμ και $s_1=4,2$ χλμ ενώ αυτά με τη βενζίνη Β 16,9 χλμ κατά μέσο όρο και $s=4$ χλμ. Να γίνει έλεγχος στο επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,01$ εάν υπάρχει κάποια διαφορά ανάμεσα στις δυο μάρκες βενζίνης. Αν η βενζίνη Α είχε χρησιμοποιηθεί σε 10 οχήματα και στη συνέχεια η Β χρησιμοποιήθηκε στα ίδια αυτοκίνητα θα μπορούσε να εκτελεστεί ένα test διαφορών κατά ζεύγη. Αν $\bar{x}=-0,6$ και $s=0,39$ να γίνει ο έλεγχος σε επίπεδο $\alpha=0,001$.
23. Μια ομάδα από 17 μαθητές συμμετείχε στην αξιολόγηση ενός προγράμματος που είχε ως στόχο τη βελτίωση της μνήμης. Οι μαθητές χωρίστηκαν με τυχαίο τρόπο σε δύο ομάδες: Η Α ομάδα, η πειραματική ομάδα, και ομάδα Β, η ομάδα ελέγχου. Οι 17 μαθητές ελέγχθηκαν ως προς την ικανότητα να θυμηθούν

μια συγκεκριμένη λίστα λέξεων. Μόνο η ομάδα Β ακολούθησε ειδική εκπαίδευση. Ένα μήνα αργότερα και οι δύο ομάδες ελέγχθηκαν ξανά και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Μπορούν αυτά τα δεδομένα να στηρίξουν την υπόθεση ότι η ειδική εκπαίδευση ήταν αποτελεσματική σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,01$;

Ομάδα Α									
	Μαθητές								
Χρόνος ελέγχου	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Πριν	23	22	20	21	23	18	17	20	23
Μετά	28	29	26	23	31	25	22	26	26

Ομάδα Β									
	Μαθητές								
Χρόνος ελέγχου	10	11	12	13	14	15	16	17	
Πριν	22	20	13	17	21	19	20	20	
Μετά	13	15	26	18	21	17	18	20	

24. Δίνονται παρακάτω τα βάρη οχτώ ανθρώπων πριν σταματήσουν το κάπνισμα και πέντε εβδομάδες αφού σταμάτησαν το κάπνισμα. Σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 μπορεί να υποστηριχτεί πως το βάρος αυξάνεται μόλις κάποιος σταματήσει το κάπνισμα;

Περίπτωση	1	2	3	4	5	6	7	8
Πριν	74	88	75	58	65	64	60	66
Μετά	77	90	74	61	66	68	62	64

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Να σχηματιστεί ένα πίνακας δεδομένων με περιπτώσεις τους μαθητές της τάξης μας που θα περιλαμβάνει δεδομένα από τις παρακάτω μεταβλητές: Φύλο, ύψος, βάρος, σφίξεις, βαθμός στα μαθηματικά προηγούμενης χρονιάς, βαθμός μαθηματικών πρώτου τριμήνου αυτής χρονιάς. κ.λ.π.

- Θεωρώντας τα κορίτσια της τάξης σας ένα τυχαίο δείγμα καταγράψτε το ύψος τους. Να κάνετε το ίδιο με τα αγόρια της τάξης σας. Στηριζόμενοι στα παραπάνω δεδομένα μπορεί να υποστηρίξετε πως οι μαθητές αυτής της ηλικίας είναι υψηλότερα από τις συμμαθήτριες τους;
- Η ίδια δραστηριότητα μ' αυτήν της 1, μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας μεγαλύτερα δείγματα αν ερωτηθούν για το ύψος τους οι μαθητές από τα άλλα τμήματα της τάξης σας. Ποιο είναι το συμπέρασμά σας σ' αυτή την περίπτωση; Να συγκριθούν μ' αυτά της 1.
- Χρησιμοποιώντας το βάρος και το ύψος μαθητή να υπολογίστε για το κάθε με τη βοήθεια του τύπου $c = (\text{βάρος})/(\text{ύψος})^2$ το δείκτη μάζας σώματος. Χωρίστε του μαθητές σε δυο κατηγορίες : 1= χαμηλό επίπεδο και 2= υψηλό επίπεδο παχυσαρκίας (Αν ο μαθητής έχει τιμή $c > 25$ ανήκει στην ομάδα 2.) Μπορεί να υποστηριχτεί η σχέση δείκτη μάζας σώματος και αριθμού σφίξεων.
- Μπορεί να υποστηριχτεί ότι η τάξη έχει βελτιωθεί βαθμολογικά από πέρυσι χρησιμοποιώντας ένα τυχαίο δείγμα 4 μαθητών που θα ληφθεί με τη βοήθεια των τυχαίων αριθμών; Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται από τα στοιχεία για όλη την τάξη συμβατό με την πραγματικότητα; Πως ερμηνεύονται οι τυχόν διαφορές;
- Χρησιμοποιώντας το δείγμα του προηγούμενου ερωτήματος σχηματιστεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση μεταβολή της βαθμολογίας των μαθητών της τάξης σας. Η μέση μεταβολή της τάξης περιλαμβάνεται σ' αυτό το διάστημα.
- Θεωρώντας την τάξη σας σαν τυχαίο δείγμα εκτιμήστε με τη βοήθεια ενός 99% διαστήματος εμπιστοσύνης τον μέσο δείκτη μάζας των μαθητών αυτής της ηλικίας.