ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Ειδικές διακριτές κατανομές

Η κατανομή Bernoulli
Διωνυμικό Πείραμα
Διωνυμική Κατανομή
Γεωμετρική Κατανομή
Η κατανομή Poisson (1787 – 1840)*
Η προσέγγιση της Διωνυμικής από κατανομή Poisson
Υπεργεωμετρική κατανομή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
ΕΙΔΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

4.1 Η κατανομή Bernoulli

Αν η διακριτή τ.μ. Χ παίρνει τις τιμές 0 και 1 με πιθανότητες p_0 και p_1 αντιστοίχως, όπου $p_0+p_1 = 1$, τότε η τ.μ. Χ έχει κατανομή Bernoulli.

Ο πίνακας της κατανομής πιθανότητας είναι:

x_k	0	1
p_k	p_0	p_1

Χάριν ευκολίας συμφωνούμε να συμβολίζουμε την πιθανότητα $P[X=1] = p_1$, με p και την πιθανότητα $P[X=0] = p_0$ με q. Με τον συμβολισμό αυτό ο πίνακας κατανομής πιθανότητας είναι :

x_k	0	1
p_k	q	p

Από τον πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση πιθανότητας είναι :

$$P[X = x] = \boxed{p^x \cdot q^{1-x}} \quad \text{για } x = 0, 1 \text{ και } q = 1 - p$$

Αν η τ.μ. Χ έχει κατανομή Bernoulli, τότε :

$$E[X] = p \text{ και } Var(X) = pq$$

Η ποσότητα p λέγεται «παράμετρος» της κατανομής.

Για τον πλήρη προσδιορισμό της κατανομής και τον υπολογισμό των πιθανοτήτων της τ.μ. Χ πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή της παραμέτρου.

Π.χ. αν p=0,4 η $P[X = x] = 0{,}4^x \cdot (1 - 0{,}4)^{1-x}$ για $x = 0, 1$

οπότε για x = 0 η $P[X=0] = 0{,}4^0 \cdot (1-0{,}4)^1 = 0{,}6$

και για x = 1 η $P[X=1] = 0{,}4^1 \cdot (1-0{,}4)^{1-1} = 0{,}4$

Γενικεύοντας παίρνουμε το ακόλουθο :

Κάθε τυχαίο πείραμα με δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, όπου ω_1, ω_2 απλά ενδεχόμενα αμοιβαίως αποκλειόμενα είναι πείραμα Bernoulli.

Η διακριτή τ.μ. X που ορίζεται στον δειγματικό χώρο Ω ενός πειράματος Bernoulli έχει δειγματικό χώρο $R_X = \{x_1, x_2\}$.

Παραδείγματα πειραμάτων Bernoulli μεταξύ άλλων αποτελούν και:

α) Η ρίψη νομίσματος με ω_1 = Κ (κεφάλι) και ω_2 = Γ (γράμματα)
β) Η γέννηση παιδιού με ω_1 = αγόρι και ω_2 = κορίτσι
γ) Συμμετοχή σε εξετάσεις με ω_1 = Επιτυχία και ω_2 = Αποτυχία
δ) Απόφαση δικαστηρίου με ω_1 = αθώος και ω_2 = ένοχος

Ένα πείραμα Bernoulli ονομάζεται και δοκιμή Bernoulli.

Για λόγους ευκολίας, ονομάζουμε το ένα εκ των δύο απλών ενδεχομένων ως «Επιτυχία (Ε)» και το άλλο ως «Αποτυχία (Α)».

Έτσι p(E) = p και p(A) = q, όπου q = 1-p.

James Bernoulli (1654 – 1705)

Οι Bernoullis ήταν προτεσταντική οικογένεια που το 1583 έφυγαν από την Αμβέρσα για να γλυτώσουν τη σφαγή από τους Καθολικούς (όπως τη νύχτα του Αγίου Βαρθολομαίου) στην παρατεινόμενη καταδίωξη των Ουγενότων. Η οικογένεια μετά από σύντομη περιπλάνηση εγκαταστάθηκε στη Βασιλεία της Ελβετίας.

Τα διασημότερα μέλη της ταλαντούχου αυτής οικογένειας ήταν ο James, ο αδερφός του John και τα ξαδέλφια του Nickolas και Daniel.

Ο James σε ηλικία 21 ετών παίρνει πτυχίο Θεολογίας από το Πανεπιστήμιο της Βασιλείας. Στην ηλικία των 29 ετών επιστρέφει στο Πανεπιστήμιο ως λέκτορας της Φυσικής και 4 χρόνια αργότερα ανακηρύσσεται καθηγητής Μαθηματικών.

Η εργασία του με τίτλο "The Art of Conjecture" δημοσιεύθηκε το 1713, οκτώ χρόνια μετά το θάνατό του παραμένοντας έως τις ημέρες μας πολύτιμη στη θεωρία πιθανοτήτων, καθώς και για τις εφαρμογές της στη στατιστική και στη μαθηματική μελέτη της κληρονομικότητας.

ΠΗΓΗ : E.T.BELL "ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ" ΤΟΜΟΣ Ι ΠΑΝ. ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

4.2 Διωνυμικό Πείραμα

Αν υποθέσουμε ότι επαναλαμβάνουμε ν το πλήθος φορές μια δοκιμή Bernoulli (ένα πείραμα Bernoulli) και ότι ισχύουν:

- **I.** Η πιθανότητα επιτυχίας p(E) παραμένει σε κάθε δοκιμή σταθερή και ίση με p και
- **II.** Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, που σημαίνει ότι το αποτέλεσμα της μιας δοκιμής δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της επόμενης ή κάποιας άλλης από τις επόμενες.

Τότε έχουμε ένα πείραμα γνωστό ως **διωνυμικό πείραμα**.
Επομένως:

Οι ν επαναλήψεις ενός πειράματος Bernoulli για τις οποίες ισχύουν οι υποθέσεις **I.** και **II.** προσδιορίζουν το ***διωνυμικό πείραμα.***

Παραδείγματα διωνυμικών πειραμάτων αποτελούν:

α) Ο προσδιορισμός του αριθμού x των κεφαλών (K) σε ν = 10 ρίψεις ενός νομίσματος.

β) Ο προσδιορισμός του αριθμού x των αγοριών σε ν = 200 γεννήσεις.

γ) Ο προσδιορισμός του αριθμού των επιτυχόντων σε ν = 150 υποψήφιους.

δ) Ο προσδιορισμός του αριθμού x των ενόχων σε ν = 50 άτομα φερόμενα ως δράστες και γενικώς:

Ο προσδιορισμός x επιτυχιών σε ν επαναλήψεις δοκιμών Bernoulli.

4.3 Διωνυμική Κατανομή

Από την περιγραφή της διωνυμικής διαδικασίας φαίνεται ότι ο αριθμός x είναι τιμή μιας διακριτής τ.μ. X, της οποίας η κατανομή πιθανότητας λέγεται **«διωνυμική κατανομή πιθανότητας»**. Την κατανομή αυτή εισάγουμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 1ο:

Πωλητής ασφαλιστηρίων συμβολαίων ζωής συναντά τους υποψήφιους πελάτες του ξεχωριστά τον καθένα.

Σε κάθε συνάντηση καταβάλλει την **ίδια προσπάθεια** προκειμένου να πείσει τον υποψήφιο πελάτη να ασφαλιστεί.

Η διαπίστωση που έχει κάνει ο πωλητής μετά από πολύχρονη θητεία στο χώρο των ασφαλίσεων είναι ότι η πιθανότητα να πείσει τον πελάτη να ασφαλιστεί (πιθανότητα επιτυχίας) είναι **p = 0,1** ή (10%).

Ποια η πιθανότητα σε ν = 4 συναντήσεις με ισάριθμους υποψήφιους πελάτες να ασφαλίσει τον ένα (x = 1) από αυτούς ;

Απάντηση

Ορίζουμε το ενδεχόμενο:

Ε = ο πελάτης πείθεται και ασφαλίζεται με συμπληρωματικό το ενδεχόμενο

Α = ο πελάτης δεν ασφαλίζεται

Από την εκφώνηση συμπεραίνουμε τα ακόλουθα :

- Η πιθανότητα επιτυχίας p(E) είναι σταθερή για κάθε συνάντηση με πελάτη και ίση με p=0,1. Εδώ ως δοκιμή θεωρείται η συνάντηση με πελάτη.
- Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες. Ο πωλητής συναντά κάθε πελάτη χωριστά. Η απόφαση του ενός δεν επηρεάζει την απόφαση του επόμενου ή κάποιου άλλου από τους επόμενους.

Το πείραμα είναι συνεπώς διωνυμικό και αν με Χ συμβολίσουμε την τ.μ., οι τιμές της οποίας είναι ο αριθμός των επιτυχιών σε ν δοκιμές τότε :

Η P[X=x] είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Χ που δίνει την πιθανότητα να έχουμε x επιτυχίες σε ν δοκιμές.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο πωλητής στις ν = 4 συναντήσεις με ισάριθμους πελάτες είχε μία επιτυχία (x=1), ενώ οι άλλοι τρεις αρνήθηκαν να ασφαλιστούν. Έχουμε επομένως τη διαδοχή των απλών ενδεχομένων Ε και Α, που συνιστούν τα παρακάτω σύνθετα ενδεχόμενα :

Κ = ΕΑΑΑ , Λ = ΑΕΑΑ , Μ = ΑΑΕΑ , Ρ = ΑΑΑΕ

το πλήθος των οποίων είναι ίσο με τους συνδυασμούς των $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4$.

Από την ανεξαρτησία των 4 δοκιμών προκύπτει ότι:

$$P(K) = P(EAAA) = P(E)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(A) = p\cdot q\cdot q\cdot q = p\cdot q^3$$

Για p=0,1 και q=1-p = 1-0,1=0,9 έχουμε: $P(K) = p^1\cdot q^3 = 0{,}1^1\cdot 0{,}9^3 = 0{,}073$

Με ανάλογους υπολογισμούς : P(Λ)=P(Μ)=P(Π)=0,073

Η πιθανότητα μιας επιτυχίας (Ε) σε ν=4 δοκιμές προκύπτει υπολογίζοντας το πλήθος των τετράδων που περιέχουν μία επιτυχία επί την πιθανότητα κάθε τέτοιας τετράδας, δηλαδή:

$$P[X=1] = \binom{4}{1}\cdot p\cdot q^3 = \binom{4}{1}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3 = 4\cdot 0{,}073 = 0{,}292$$

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε ως εξής:

Η πιθανότητα να έχουμε x επιτυχίες σε ν ανεξάρτητες δοκιμές, όταν σε κάθε δοκιμή η πιθανότητα επιτυχίας είναι σταθερή και ίση με p είναι:

$$P[X=x] = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x}$$

Η P[X=x], όπως ορίστηκε, αποτελεί τη **συνάρτηση πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής**.

Ο δειγματικός χώρος R_X της διακριτής τ.μ. X που έχει τη διωνυμική κατανομή είναι : $R_X = \{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$.

Για να δηλώσουμε ότι η διακριτή τ.μ. X έχει τη *διωνυμική κατανομή*, γράφουμε :

$$X \sim B(\nu, p)$$

και εννοούμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$\boxed{P[X = x] = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x}} \qquad \text{με} \quad x=0, 1, 2, .., \nu$$

$$\text{και} \quad q=1-p$$

όπου ν, p παράμετροι της κατανομής.

Αποδεικνύεται ότι αν η τ.μ. X ~B(ν, p), τότε : E[X]=νp και V(X)=νpq

Παράδειγμα 2°:

Να βρεθεί η πιθανότητα που έχει ο πωλητής να ασφαλίσει 2 πελάτες από τους 4 που θα συναντήσει.

Απάντηση

Αν X η τ.μ. που συμβολίζει τον αριθμό των πελατών που θα ασφαλιστούν, τότε :

$$P[X = 2] = \binom{4}{2} p^2 q^{4-2} = \binom{4}{2} p^2 q^2 = \binom{4}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 0{,}0081 =$$

$$= 6 \cdot 0{,}0081 = 0{,}0486$$

Παράδειγμα 3°:

Ποια η πιθανότητα του πωλητή να ασφαλίσει περισσότερους από x = 2 πελάτες στους ν = 4 που θα συναντήσει;

Απάντηση

Ζητάμε την πιθανότητα της τ.μ. X να είναι μεγαλύτερη του 2, δηλαδή :

$$P[X>2] = P[X=3] + P[X=4]$$

Όπου : $P[X = 3] = \binom{4}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{4-3} = \frac{4!}{1!3!} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0036$

και $P[X = 4] = \binom{4}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^{4-4} = \frac{4!}{0!4!} \cdot 0{,}1^4 \cdot 1 = 0{,}0001$

Άρα : P[X>2] = 0,004 + 0,0001 = 0,0041

Παράδειγμα 4°:

Ποια η πιθανότητα του πωλητή να μην ασφαλίσει πελάτη στις 4 συναντήσεις;

Απάντηση

Η $P[X=0]=\binom{4}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^4=\frac{4!}{0!4!}\cdot 1\cdot 0{,}9^4=0{,}6561$

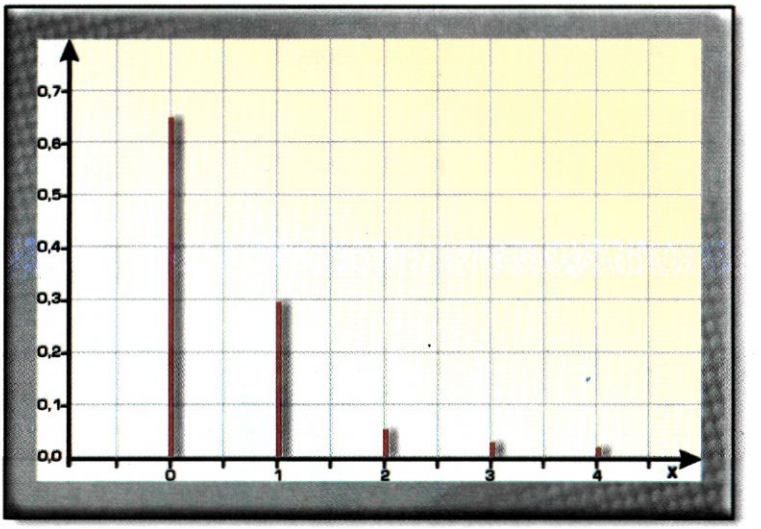
Έχουμε συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων που παρατέθηκαν τον ακόλουθο πίνακα κατανομής πιθανότητας, όπου :

$$P[X=x]=\binom{4}{x}p^x q^{4-x}, \qquad x=0,1,2,3,4$$

$$p=0,1 \quad q=0,9$$

x	0	1	2	3	4
P[X=x]	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Το διάγραμμα πιθανότητας της B(4, 0,1) δίνεται στο Σχ. (4.1).



Σχ. (4.1) Διάγραμμα πιθανότητας της B(4, 0,1)

Παράδειγμα 5°:

Ποιο είναι το διάγραμμα πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής που αντιστοιχεί στο τυχαίο πείραμα της ρίψης αμερόληπτου νομίσματος, επί ν=6 συνεχείς φορές.

Απάντηση

Ορίζουμε ως επιτυχία την εμφάνιση κεφαλιού (Κ) και συμβολίζουμε με Χ την τ.μ. με τιμές τον αριθμό των επιτυχιών στις ν = 6 δοκιμές.

Από την υπόθεση ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο έχουμε ότι η σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p είναι ίση με την πιθανότητα αποτυχίας q, ($p = q = \frac{1}{2}$).

Άρα η τ.μ. $X \sim B(\nu,p) = B(6, \frac{1}{2})$, με x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Για την κατασκευή του διαγράμματος πιθανότητας υπολογίζουμε τις πιθανότητες των τιμών της Χ με τη βοήθεια της :

$$P[X = x] = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x} = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Άρα :

$$P[X = 0] = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}0156$$

$$P[X = 1] = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6!}{1!5!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}0938$$

$$P[X = 2] = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}2344$$

$$P[X = 3] = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}3125$$

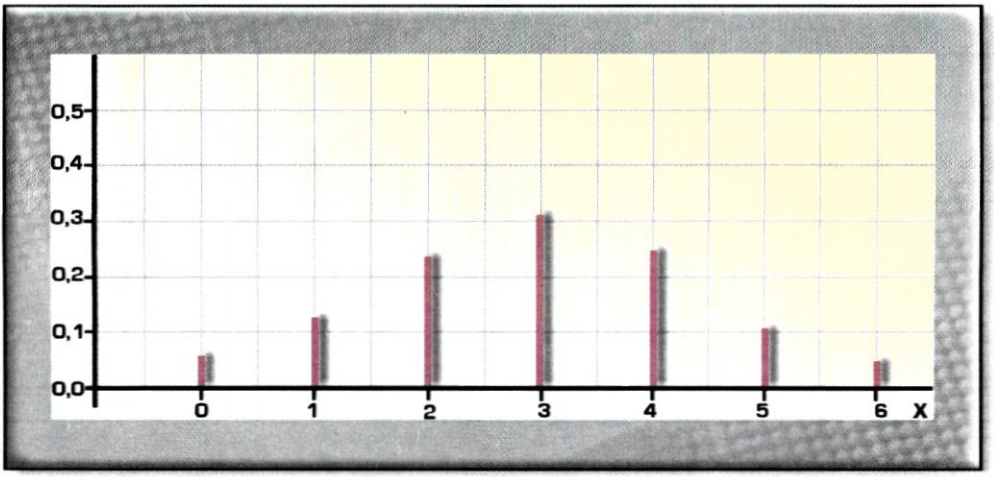
$$P[X = 4] = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6!}{4!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}2344$$

$$P[X = 5] = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6!}{5!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}0938$$

$$P[X = 6] = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}0156$$

Ο πίνακας κατανομής πιθανότητας συνοψίζει τα αποτελέσματα και η μορφή της κατανομής δίνεται στο διάγραμμα του Σχ. (4.2).

x	0	1	2	3	4	5	6
P[X=x]	0,0156	0,0938	0,2344	0,3125	0,2344	0,0938	0,0156



Σχ. (4.2) Διάγραμμα πιθανότητας της B(6,1/2)

Παράδειγμα 6ο:

Δοχείο περιέχει μεγάλο αριθμό μαύρων και άσπρων σφαιρών σε λόγο 2:1* (δύο προς ένα). Επιλέγουμε στην τύχη και με επανατοποθέτηση δείγμα ν = 4 σφαιρών, εξασφαλίζοντας έτσι σταθερή πιθανότητα p μαύρης σφαίρας.

α) Να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X που συμβολίζει τον αριθμό των μαύρων σφαιρών στο δείγμα, και

β) Να κατασκευαστεί το διάγραμμα πιθανότητας της κατανομής.

Απάντηση

---

* Αν π.χ. σε ένα δοχείο υπάρχουν δύο είδη αντικειμένων σε λόγο α:β, όπου α του Ιου είδους και β του ΙΙου είδους, τότε : $P(I) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ και $P(II) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

Αν η τ.μ. X δίνει τον αριθμό των μαύρων σφαιρών σε τυχαία επιλεγμένο δείγμα 4 σφαιρών, τότε :

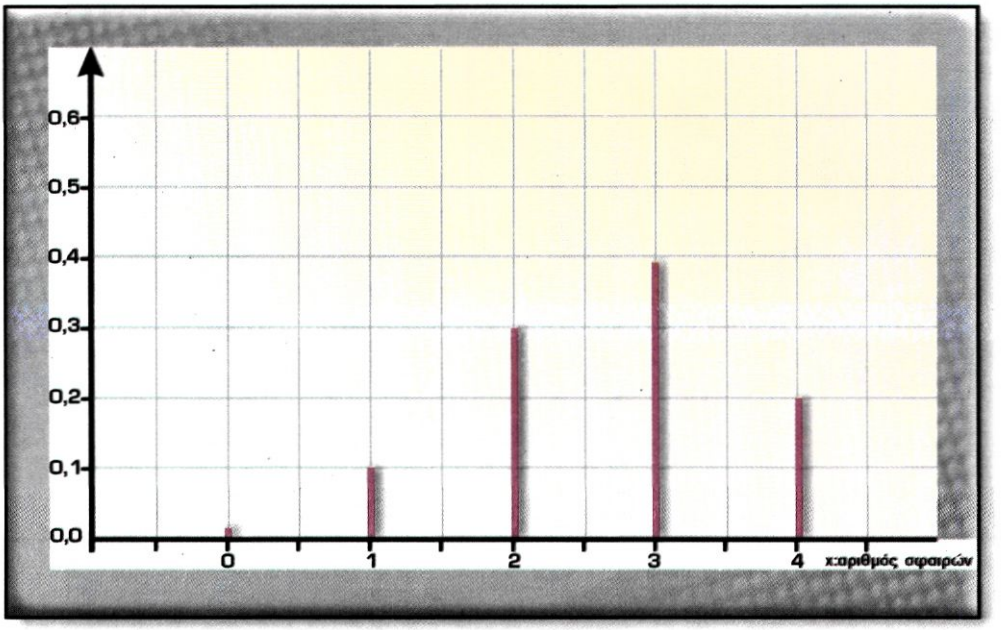
$$X \sim B(4, \frac{2}{3})$$

όπου $p = \frac{2}{3}$ η πιθανότητα να βγάλουμε από το δοχείο μαύρη σφαίρα.

Η κατανομή πιθανότητας δίνεται από τον πίνακα :

x_j	0	1	2	3	4	
	$\binom{4}{0}\binom{4}{0}^0\binom{1}{3}^4$	$\binom{4}{1}\binom{2}{3}^1\binom{1}{3}^3$	$\binom{4}{2}\binom{2}{3}^2\binom{1}{3}^2$	$\binom{4}{3}\binom{2}{3}^3\binom{1}{3}^1$	$\binom{4}{4}\binom{2}{3}^4\binom{1}{3}^0$	Σύνολο
$P[X=x_j]$	0,0123	0,0988	0,2963	0,3951	0,1975	1

και η μορφή της στο διάγραμμα του Σχ. (4.3)

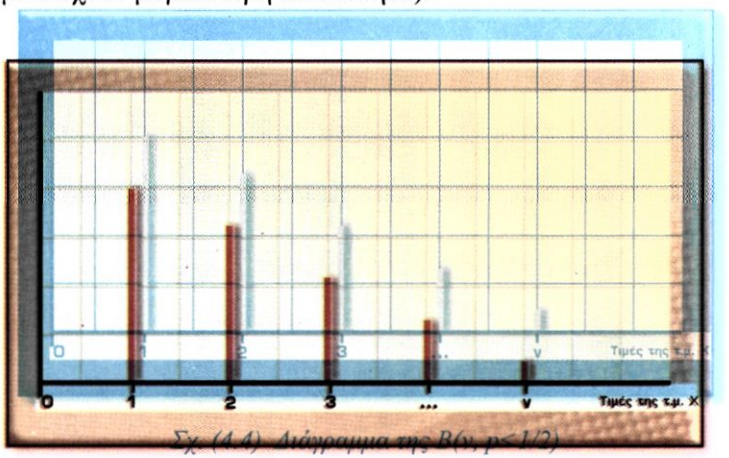


Σχ. (4.3) Διάγραμμα της B(4,2/3)

Από τα παραδείγματα που παρατέθηκαν προκύπτουν τα ακόλουθα:

1. Αν η σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p σε μια διωνυμική κατανομή είναι μικρότερη του $\frac{1}{2}$, τότε το διάγραμμα πιθανότητας έχει τη μορφή του Σχ. (4.4) (Μικρές τιμές της τ.μ. X έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα).

$X \sim B(\nu, p < \frac{1}{2})$

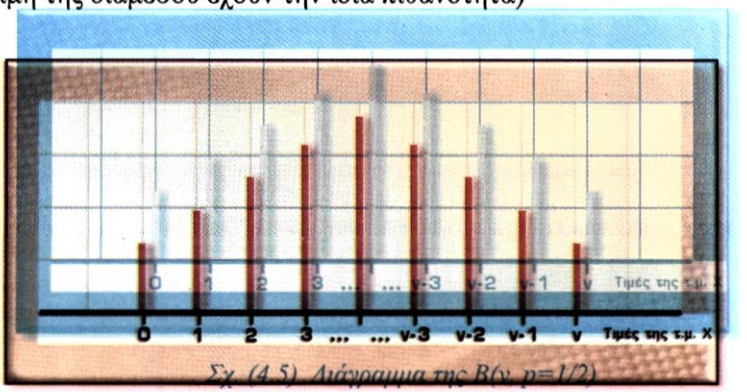


Σχ. (4.4) Διάγραμμα της B(ν, p<1/2)

Σχ. (4.4) Διάγραμμα της B(ν, p<1/2)

2. Αν η σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p σε μια διωνυμική κατανομή είναι ίση με $\frac{1}{2}$, τότε η κατανομή είναι συμμετρική, Σχ. (4.5) (Τιμές της τ.μ. X συμμετρικές ως προς την τιμή της διαμέσου έχουν την ίδια πιθανότητα)

$X \sim B(\nu, p = \frac{1}{2})$

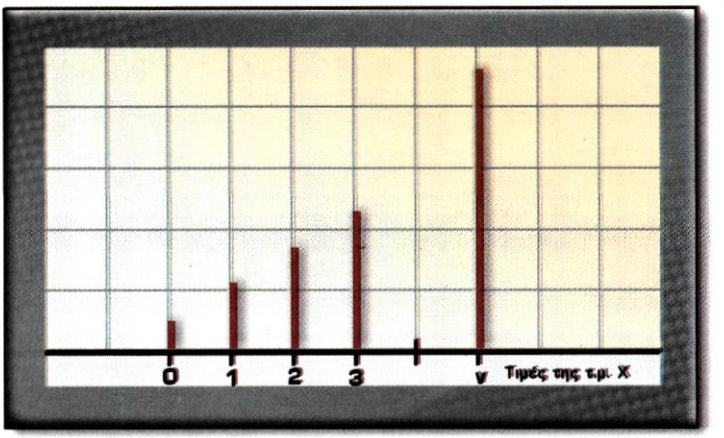


Σχ. (4.5) Διάγραμμα της B(ν, p=1/2)

Σχ. (4.5) Διάγραμμα της B(ν, p=1/2)

3. Αν η σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p σε μια διωνυμική κατανομή είναι μεγαλύτερη του $\frac{1}{2}$, τότε το διάγραμμα πιθανότητας έχει τη μορφή του Σχ. (4.6) (Μεγάλες τιμές της τ.μ. X έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα)

$X \sim B(\nu, p > \frac{1}{2})$



Σχ. (4.6) Διάγραμμα της B(ν, p>1/2)

4.4 Γεωμετρική κατανομή

Στην περίπτωση μιας διωνυμικής κατανομής το πρόβλημα που έχουμε είναι η εύρεση της πιθανότητας x επιτυχιών σε ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.

Έτσι στο παράδειγμα του πωλητή ασφαλιστηρίων ζωής υπολογίζουμε την πιθανότητα να ασφαλίσει π.χ. 2 πελάτες στο σύνολο των 4 που είχε προγραμματίσει να συναντήσει.

Ας δούμε τώρα ένα διαφορετικό πρόβλημα :

«Ποια είναι η πιθανότητα σε διαδοχικές συναντήσεις που θα έχει ο πωλητής με υποψήφιους πελάτες να πωλήσει το πρώτο ασφαλιστήριο κατά τη x συνάντηση;»

Ζητάμε συνεπώς την πιθανότητα σε επαναλαμβανόμενες δοκιμές Bernoulli η **πρώτη** επιτυχία να εμφανιστεί κατά την **x δοκιμή**.

Είναι αναγκαίο στο σημείο αυτό να θυμηθούμε ότι :

P(E) = P (ο πωλητής να πείσει τον πελάτη) = p = 0,1

P(A) = P(ο πωλητής να μην πείσει τον πελάτη) = q = 0,9

Επειδή η **πρώτη επιτυχία** σημειώνεται στη x δοκιμή οι x-1 προηγηθείσες προσπάθειες είναι αποτυχημένες. Θα έχουμε συνεπώς την ακόλουθη διαδοχή απλών ενδεχομένων:

$$\underbrace{A\,A\,A\ldots}_{x-1\ \text{αποτυχίες}}\,E \longrightarrow 1\ \text{επιτυχία}$$

Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου με βάση την ανεξαρτησία των δοκιμών είναι:

$$P[AAA...AE] = P(A)P(A)..P(A)P(E) = \underbrace{q\cdot q...q}_{x-1}\cdot p =$$

$$= q^{x-1}\cdot p \qquad \text{με } q = 1-p$$

Η διακριτή τ.μ. X έχει τη *γεωμετρική κατανομή*, αν η συνάρτηση πιθανότητας είναι : $P[X=x]=q^{x-1}p$, με x=1, 2, ... όπου p, παράμετρος της κατανομής και q = 1-p.

Ο χαρακτηρισμός της κατανομής ως γεωμετρικής οφείλεται στο γεγονός ότι οι πιθανότητες $P[X=1]=p$, $P[X=2]=qp$, $P[X=3]=q^2p$ είναι διαδοχικοί όροι φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο p και λόγο q = 1-p, όπου $0 < q < 1$.

Από την τελευταία παρατήρηση προκύπτει ότι:

- $P[X=x] \geq 0 \qquad x = 1, 2, \ldots$
- $\Sigma P[X=x] = 1$ διότι :
  $\Sigma P[X=x] = (p + qp + q^2p + \ldots) = p(1 + q + q^2 + \ldots) =$
  $= p\cdot\dfrac{1}{1-q}$ (άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου)
  $= 1$, αφού $1 - q = p$

Άρα η $P[X=x]=q^{x-1}p$, με x=1, 2, ... και q = 1–p , είναι πράγματι συνάρτηση πιθανότητας.

Σημείωση: Για να δηλώσουμε ότι η τ.μ. X έχει τη γεωμετρική κατανομή, γράφουμε : $X\sim\Gamma(p)$

Αν η τ.μ. $X\sim\Gamma(p)$, αποδεικνύεται ότι : $E[X] = \dfrac{1}{p}$ και $V[X] = \dfrac{q}{p^2}$, $q = 1 - p$

Παράδειγμα 7° :

Ποια η πιθανότητα στρίβοντας ένα αμερόληπτο νόμισμα να φέρουμε κεφάλι στην τρίτη δοκιμή;

Απάντηση

Αν Κ = κεφάλι και Γ = γράμματα

τότε $P(K) = P(\Gamma) = p = \frac{1}{2}$

Η τ.μ. Χ συμβολίζει τη δοκιμή στην οποία εμφανίζεται η πρώτη επιτυχία. Ζητάμε συνεπώς την P[X=3].

Σύμφωνα με τη γεωμετρική κατανομή έχουμε:

$$P[X=3] = q^{3-1} \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Έτσι η πιθανότητα να πρωτοεμφανιστεί επιτυχία στην τρίτη προσπάθεια είναι $\frac{1}{8}$.

Ομοιότητες και Διαφορές Διωνυμικής και Γεωμετρικής Κατανομής

Το τυχαίο πείραμα που οδηγεί σε γεωμετρική κατανομή έχει αρκετές ομοιότητες με το διωνυμικό πείραμα, γι' αυτό χρειάζεται προσοχή στις εφαρμογές, ώστε να επιλέξουμε την κατάλληλη κάθε φορά κατανομή.

Οι **ομοιότητες** των δύο κατανομών είναι:

Α. Οι δοκιμές είναι Bernoulli, γιατί κάθε δοκιμή καταλήγει σε 2 δυνατά αποτελέσματα, επιτυχία (Ε) και αποτυχία (Α).

Β. Οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες.

Γ. Η P(E) = p σταθερή σε κάθε δοκιμή.

Η **διαφορά** μεταξύ των 2 κατανομών είναι στον **αριθμό των δοκιμών** και τούτο διότι στη διωνυμική ο αριθμός ν των δοκιμών είναι **προκαθορισμένος**, ενώ στη γεωμετρική οι δοκιμές επαναλαμβάνονται **έως ότου εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία**.

Παράδειγμα 8° :

α) Σε οικογένεια με 4 παιδιά, ποια είναι η πιθανότητα τα 3 παιδιά να είναι κορίτσια;
β) Ένα ζευγάρι αποφασίζει να κάνει παιδιά. Ποια η πιθανότητα το πρώτο αγόρι να είναι το τέταρτο παιδί ;

Απάντηση

α) Εδώ ζητάμε την πιθανότητα 3 «επιτυχιών» σε 4 δοκιμές με πιθανότητα επιτυχίας P(E)=P(κορίτσι) = $\frac{1}{2}$, υποθέτοντας ότι η πιθανότητα γέννησης αγοριού ισούται με την πιθανότητα γέννησης κοριτσιού.

Ακόμη η γέννηση αγοριού ή κοριτσιού σε κάποια οικογένεια δεν επηρεάζει το φύλο του επόμενου παιδιού.

Άρα οι προϋποθέσεις που οδηγούν σε διωνυμική κατανομή ικανοποιούνται και η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από την

$$P[X=3]=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{4}$$

β) Στην περίπτωση αυτή όλες οι συνθήκες Α, Β και Γ ικανοποιούνται. Ο αριθμός των δοκιμών όμως δεν είναι σταθερός, αφού υπάρχει το ενδεχόμενο το τέταρτο παιδί να μην είναι αγόρι και το ζευγάρι να συνεχίσει την προσπάθεια μέχρι να αποκτήσει αγόρι. Η κατανομή συνεπώς είναι γεωμετρική και η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από την :

$$P[X=4]=q^{4-1}\cdot p=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

τέσσερις φορές μικρότερη από την πιθανότητα της περίπτωσης (Α). [Γιατί ;]

4.5 Η κατανομή POISSON

Simeon. D. Poisson (1781-1840).
Σπούδασε Μαθηματικά στην Ecole Polytechnique του Παρισιού με δασκάλους τον Laplace και τον Lagrange. Από το 1802 έως το 1808 δίδαξε στην Ecole Polytechnique και το 1809 ανέλαβε την έδρα των καθαρών Μαθηματικών.
Το 1837 σε μία δημοσίευσή του με θέμα τις πιθανότητες πρωτοεμφανίζεται η κατανομή Poisson. Η κύρια συνεισφορά του είναι μία σειρά εργασιών για τα ορισμένα ολοκληρώματα και τις σειρές Fourier.

- *Πόσοι σεισμοί μεγέθους μεγαλύτερου των 6,5 Richter θα συμβούν κατά τη διάρκεια του 2000;*
- *Πόσα ορθογραφικά λάθη περιμένετε να βρείτε στην επόμενη σελίδα του βιβλίου;*
- *Πόσα τηλεφωνήματα νομίζετε ότι θα έχετε κατά τη διάρκεια του διαστήματος 3 με 4 το απόγευμα;*

Η απάντηση σε κάθε μία από τις ερωτήσεις αυτές μπορεί να δοθεί αριθμητικά.
Έτσι π.χ. στην πρώτη ερώτηση η απάντηση που θα μπορούσε να δώσει κανείς είναι 0,1,2,... Δεχόμενοι ότι οι σεισμοί είναι **τυχαία φαινόμενα** (**ενδεχόμενα**) μπορούμε να πούμε ότι οι αριθμοί 0,1,2,... αποτελούν τιμές μιας τ.μ X που συμβολίζει τη **συχνότητα εμφάνισης** του ενδεχομένου **σεισμός μεγέθους > 6,5 Richter.**

Αν και η χώρα που ζούμε είναι ως γνωστό σεισμογενής, σεισμοί μεγέθους άνω των 6,5 Richter **σπάνια** έχουν σημειωθεί. Επιβεβαίωση της σπανιότητας του ενδεχομένου αυτού αποτελεί το ακόλουθο παράδειγμα βασισμένο σε πραγματικά δεδομένα.

Παράδειγμα 9^{ο} :

Κατά τη διάρκεια χρονικού διαστήματος είκοσι τεσσάρων (24) ετών και συγκεκριμένα μεταξύ των ετών 1975-1997 συμπεριλαμβανομένων, κατεγράφησαν από τους σεισμογράφους του Γεωδυναμικού Ινστιτούτου και του Αστεροσκοπείου Αθηνών επτά (7) συνολικά σεισμικές δονήσεις εντάσεως μεγαλύτερης των 6,5 Richter. Στον πίνακα, δίνεται το έτος που σημειώθηκαν οι σεισμικές δονήσεις και τα αντίστοιχα μεγέθη σε Richter.

ΕΤΟΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	Richter
1979	1	7,30
1981	2	6,80 6,80
1982	1	6,90
1983	2	6,70 6,70
1995	1	6,60
ΣΥΝΟΛΟ	7	

Κατά τη διάρκεια των ετών που δεν αναγράφονται στον πίνακα δεν σημειώθηκαν δονήσεις άνω των 6,5 Richter.

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι η αναφορά μας σε ενδεχόμενο σεισμό αυτού του μεγέθους είναι αναφορά σε **σπάνιο ενδεχόμενο**.

Έστω λοιπόν τώρα Χ μία **διακριτή τυχαία μεταβλητή** που **μετρά τη συχνότητα** εμφάνισης τέτοιων **σπάνιων** ενδεχομένων σε **προκαθορισμένο χρονικό διάστημα.**

ΑΝ

Α) Η εμφάνιση ενός ενδεχόμενου κατά τη διάρκεια προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος σταθερού πλάτους δεν επηρεάζεται από την εμφάνιση ούτε και επηρεάζει την εμφάνιση κάποιου άλλου ενδεχόμενου.
(Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα)

Β) Η πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχόμενου κατά τη διάρκεια μικρού χρονικού διαστήματος π.χ Δt παραμένει σταθερή για όλα τα διαστήματα πλάτους ίσου με το Δt. *(Τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα σε μικρά διαστήματα ίσου πλάτους)*

Γ) Ένα μόνο ενδεχόμενο είναι δυνατόν να εμφανιστεί κατά την διάρκεια μικρού χρονικού διαστήματος Δt.
(Τα ενδεχόμενα εμφανίζονται μεμονωμένα σε διαστήματα μικρού πλάτους)

ΤΟΤΕ :

Η διακριτή τ.μ Χ έχει ***κατανομή Poisson***, αν η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,... \text{ και } \lambda > 0$$

Για να δηλώσουμε ότι η τ.μ Χ έχει κατανομή Poisson γράφουμε:

$$X \sim P(\lambda)$$

Το **λ** που είναι η **παράμετρος** της κατανομής είναι **εξ' ορισμού** ο **μέσος αριθμός εμφανίσεων** του ενδεχομένου σε διάστημα **προκαθορισμένου** πλάτους.

Στο παράδειγμα των σεισμικών δονήσεων έντασης μεγαλύτερης των 6,5 Richter που σημειώθηκαν σε διάστημα 24 ετών, **ο μέσος αριθμός** σεισμικών δονήσεων ανά **έτος** (στην περίπτωση που το προκαθορισμένο χρονικό διάστημα είναι το **έτος)** αποτελεί τιμή του **λ.**

Έτσι διαιρώντας τον συνολικό αριθμό των σεισμικών δονήσεων ν =7 που σημειώθηκαν κατά τη διάρκεια των 24 ετών δια του 24 βρίσκουμε:

$$\lambda = \frac{7}{24} = 0,292$$

τιμή που **ερμηνεύεται** ως **ο μέσος αριθμός δονήσεων ανά έτος** μεγέθους μεγαλύτερου των 6,5 Richter .

Κλείνουμε την αναφορά μας στη σημαντική αυτή κατανομή με μία χαρακτηριστική της ιδιότητα και μερικά παραδείγματα απαραίτητα για την κατανόησή της και για τον τρόπο με τον οποίο εφαρμόζεται.

Αν η τ.μ Χ έχει κατανομή Poisson με παράμετρο λ τότε η αναμενόμενη τιμή της και η διακύμανσή της είναι ίσες και μάλιστα ισούνται με λ.
Δηλαδή $E[X] = \lambda$ ***και*** $Var[X] = \lambda$
Η ιδιότητα αυτή είναι χαρακτηριστική της κατανομής Poisson.

Παράδειγμα 10ο:

Αν δεχτούμε ότι η συχνότητα εμφάνισης σεισμικών δονήσεων μεγέθους μεγαλύτερου των 6,5 R έχει κατανομή Poisson με λ=0,292 ποια είναι η πιθανότητα να μην έχουμε σεισμό αυτών των μεγεθών το 2010 ;

Απάντηση

Αν X η τ.μ που συμβολίζει τη συχνότητα εμφάνισης του φαινομένου θα έχουμε σύμφωνα με την εκφώνηση :

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0{,}292^x e^{-0{,}292}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots \text{ και } \lambda = 0{,}292$$

και η πιθανότητα να μην έχουμε σεισμό κατά τη διάρκεια του συγκεκριμένου έτους είναι η πιθανότητα της τ. μ X να πάρει την τιμή x = 0
Άρα :

$$P[X = 0] = \frac{0{,}292^0 e^{-0{,}292}}{0!} = e^{-0{,}292} = 0{,}747$$

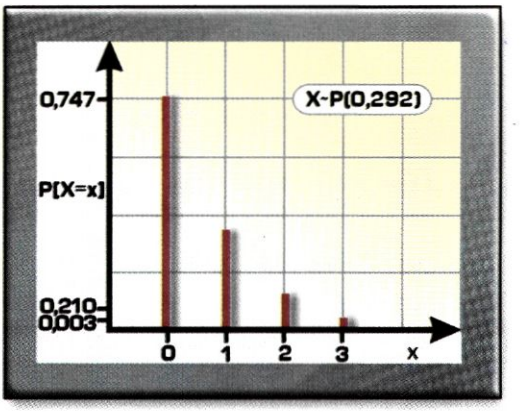
τιμή που μας δίνει σημαντικότατο βαθμό ασφάλειας για το 2010.

Οι πιθανότητες για X=1, X=2 ,… σεισμικές δονήσεις κατά τη διάρκεια του συγκεκριμένου έτους βρίσκονται αναλόγως :

$$P[X = 1] = \frac{0{,}292^1 e^{-0{,}292}}{1!} = 0{,}218$$

$$P[X = 2] = \frac{0{,}292^2 e^{-0{,}292}}{2!} = 0{,}032$$

$$P[X = 3] = \frac{0{,}292^3 e^{-0{,}292}}{3!} = 0{,}003$$



Από τις τιμές των πιθανοτήτων αυτών γίνεται φανερό ότι όσο αυξάνεται η τιμή της τυχαίας μεταβλητής X, που όπως είπαμε μετρά την συχνότητα εμφάνισης του φαινομένου, τόσο ελαττώνεται η πιθανότητα της, πράγμα άλλωστε αναμενόμενο αφού πρόκειται για σπάνιο τυχαίο φαινόμενο (ενδεχόμενο).

Παράδειγμα 11° :

Μεταξύ των ωρών 6 μ.μ. και 7 μ.μ. η υπηρεσία καταλόγου Αττικής του Ο.Τ.Ε. δέχεται κατά μέσο όρο 2 κλήσεις το λεπτό. Υποθέτοντας ότι οι κλήσεις κατανέμονται τυχαία στο χρόνο, βρείτε την πιθανότητα η τηλεφωνήτρια της συγκεκριμένης υπηρεσίας να δεχθεί σε κάποιο τυχαία επιλεγμένο λεπτό:

α) 4 κλήσεις
β) 6 κλήσεις σε τυχαία περίοδο δύο λεπτών

Απάντηση

Επειδή οι κλήσεις γίνονται σε τυχαίες χρονικές στιγμές του διαστήματος (6,7), η κατανομή της τ.μ. Χ του αριθμού των κλήσεων είναι Poisson.

α) Συμβολίζουμε με Χ τον αριθμό των κλήσεων που γίνονται σε τυχαίο λεπτό.

Επειδή ο **μέσος αριθμός** των κλήσεων σε διάστημα ενός λεπτού είναι 2, θέτουμε λ=2 και βρίσκουμε :

$$P[X=4] = \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!} = 0{,}090$$

β) Έστω τώρα Υ ο αριθμός των κλήσεων σε τυχαίο διάστημα δύο λεπτών.

Ο **μέσος αριθμός κλήσεων** ανά δίλεπτο είναι 4, οπότε θέτοντας λ = 4 βρίσκουμε:

$$P[Y=6] = \frac{4^6 \cdot e^{-4}}{6!} = 0{,}104$$

Παράδειγμα 12ο :

Σε κάποιο νόσημα ένα μικρό ποσοστό των ερυθρών αιμοσφαιρίων εμφανίζει ιδιαίτερο σχήμα. Οι γιατροί για να διαγνώσουν αν ένα άτομο νοσεί του παίρνουν για εξέταση 2ml αίματος και μετράνε τον αριθμό των ερυθρών αιμοσφαιρίων που έχουν το ιδιαίτερο αυτό σχήμα. Αν πέντε ή περισσότερα ερυθρά αιμοσφαίρια βρεθούν με το χαρακτηριστικό αυτό, τότε το άτομο θεωρείται ότι πάσχει από τη νόσο. Η κυρία Α θεωρείται ότι νοσεί.

Ο μέσος αριθμός των αιμοσφαιρίων με ιδιαίτερο σχήμα στο αίμα της είναι 1,6 ανά ml.

Ποια είναι η πιθανότητα σε δείγμα 2ml από το αίμα της κυρίας Α να βρεθούν τουλάχιστον 5 τέτοια αιμοσφαίρια; Μπορεί ο συγκεκριμένος διαγνωστικός έλεγχος να θεωρηθεί αξιόπιστος;

Απάντηση

Ονομάζουμε «παθολογικά» τα ερυθρά αιμοσφαίρια με το ιδιαίτερο σχήμα και συμβολίζουμε με Χ τον αριθμό τους στα 2ml αίματος της κ. Α. Ο αναμενόμενος αριθμός παθολογικών αιμοσφαιρίων στα 2 ml αίματος της κ. Α είναι $2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2$ [Το διπλάσιο της μέσης συχνότητας εμφάνισης των παθολογικών αιμοσφαιρίων ανά 1ml αίματος].

Υποθέτοντας ότι τα αιμοσφαίρια αυτά κατανέμονται τυχαία στο αίμα, η τ.μ. Χ έχει κατανομή Poisson με λ = 3,2.

Θέλουμε την $P[X \geq 5]$, αλλά επειδή οι τιμές της τ.μ. Χ δεν έχουν άνω φράγμα, χρησιμοποιούμε την $P[X \leq 4] = 1 - P[X \geq 5]$ και

$P[X \geq 5] = 1 - P[X \leq 4]$

Αλλά:

$$P[X\leq 4] = P[X=0] + P[X=1] + P[X=2] + P[X=3] + P[X=4] =$$

$$= \frac{3{,}2^0 \cdot e^{-3{,}2}}{0!} + \frac{3{,}2^1 \cdot e^{-3{,}2}}{1!} + \frac{3{,}2^2 \cdot e^{-3{,}2}}{2!} + \frac{3{,}2^3 \cdot e^{-3{,}2}}{3!} + \frac{3{,}2^4 \cdot e^{-3{,}2}}{4!}$$

$$= 0{,}781$$

και τελικώς

$$P[X\geq 5] = 1 - 0{,}781 = 0{,}219$$

Το αποτέλεσμα σημαίνει ότι η πιθανότητα σε 2 ml αίματος της ασθενούς κ. Α να βρεθούν 5 ή περισσότερα παθολογικά αιμοσφαίρια είναι 0,219.
Υπάρχει συνεπώς πιθανότητα 0,781 ο διαγνωστικός έλεγχος να μην δείξει ότι η κ. Α νοσεί και συνεπώς ένας τέτοιος έλεγχος δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αξιόπιστος*.

* Ένας διαγνωστικός **έλεγχος είναι αξιόπιστος** αν έχει τη **δυνατότητα** να «εντοπίζει» **υπάρχουσα** νόσο με μεγάλη πιθανότητα

(☆) Σημείωση:

Η εκθετική συνάρτηση e^x είναι εξαιρετικά χρήσιμη και είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή : $e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$

Έτσι για x=1 έχουμε : $e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots = 2{,}71828183\ldots$

Ο ορισμός της e^x μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή κατανομής πιθανότητας με παράμετρο λ.

Πράγματι : $e^\lambda = \frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} + \ldots$

Πολλαπλασιάζοντας επί $e^{-\lambda}$ παίρνουμε :

$$1 = e^\lambda \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \lambda^0 + \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} + \ldots$$

Παρατηρούμε συνεπώς ότι το άθροισμα των όρων του δεξιού μέλους της ισότητας ισούται με 1, οπότε λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε όρος είναι θετικός έχουμε :

1. $\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^\kappa}{\kappa!} > 0$ για κάθε $\kappa = 0, 1, 2\ldots$

2. $\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^\kappa}{\kappa!} = 1$

Αν τώρα καλέσουμε $P[X=x] = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2\ldots$, η $P[X=x]$ είναι κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X, η μορφή της οποίας δίνεται στον πίνακα :

x	0	1	2	...	x...
P[X=x]	$e^{-\lambda}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$	...	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$...

και καλείται όπως ήδη γνωρίζουμε κατανομή Poisson.

(☆) 4.6 Η προσέγγιση της Διωνυμικής από κατανομή Poisson

Αν η τ.μ. Χ ακολουθεί **διωνυμική** κατανομή Β(ν, p) και αν το ν είναι **μεγάλο** και το p **κοντά στο μηδέν**, τότε η κατανομή της Χ **προσεγγίζεται** ικανοποιητικά από την **Poisson** με **λ=νp**.

Οδηγίες για τη χρησιμοποίηση της προσέγγισης

- Απαιτείται συνήθως ν≥50 και p<0,1.
- Όσο μικρότερη η τιμή της p, τόσο καλύτερη η προσέγγιση
- Όσο μεγαλύτερο το ν, τόσο καλύτερη η προσέγγιση.

Παράδειγμα 13ο :

Η διακριτή τ.μ. Χ ακολουθεί διωνυμική κατανομή με ν = 60 και p = 0,02.
Να βρεθεί η P[X=1]
(α) Ακριβώς και
(β) Με τη χρήση της προσέγγισης Poisson

Απάντηση

(α) Η πιθανότητα P[X=1] βρίσκεται ακριβώς από τη διωνυμική κατανομή :

$$P[X=1] = \binom{60}{1} 0{,}02^1 (0{,}98)^{59} = 0{,}364$$

(β) Για την προσέγγιση Poisson στη διωνυμική αντικαθιστούμε το λ της Poisson από το νp της διωνυμικής.
Επειδή το ν είναι αρκετά μεγάλο και το p αρκετά μικρό, περιμένουμε προσέγγιση αρκετά ικανοποιητική.
Πράγματι :

$$P[X=1] \approx \frac{(\nu p)^1 \cdot e^{-\nu p}}{1!} = \frac{1{,}2^1 \cdot e^{-1{,}2}}{1!} = 0{,}361$$

Τιμή που διαφέρει από την «ακριβή» κατά 0,003!!

Παράδειγμα 14° : *(Αναφέρεται στην προσέγγιση της B(ν, p) από P(λ=νp)*
Σε πληθυσμό 200.000 κατοίκων, η πιθανότητα σύλληψης ατόμων για έγκλημα κατά ζωής είναι 1/80.000. Ζητούνται οι πιθανότητες με τις οποίες 0, 1, 2, 3, 4 άτομα θα συλληφθούν για έγκλημα τέτοιου είδους κατά τη διάρκεια του έτους.

Απάντηση

Αν ονομάσουμε τη «σύλληψη = επιτυχία» έχουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να συμβούν X = x επιτυχίες σε 200.000 περιπτώσεις (δοκιμές). Η μεγάλη τιμή του ν και η μικρή τιμή της p δυσκολεύουν πολύ τη χρήση της διωνυμικής κατανομής. Για να απαντήσουμε στο πρόβλημα προσεγγίζουμε τη διωνυμική από Poisson με :

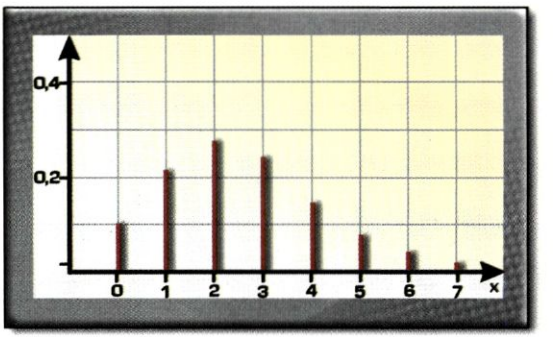
$$\lambda = \nu p = 200.000 \cdot \frac{1}{80.000} = 2,5$$

Η αντικατάσταση της τιμής του λ δίνει την :

$$P[X = x] = \frac{e^{-2,5} 2,5^x}{x!}$$

μερικές τιμές της οποίας δίνονται στον πίνακα κατανομής πιθανότητας που ακολουθεί μαζί με το αντίστοιχο διάγραμμα :

Αριθμός Συλληφθέντων x	P[X=x]
0	0,0828
1	0,2050
2	0,2565
3	0,2138
4	0,1336
5	0,0668
6	0,0278
7	0,0099



Διάγραμμα πιθανότητας της $P[X = x] = \frac{e^{-2,5} 2,5^x}{x!}$

Από τα παραδείγματα που δώσαμε γίνεται φανερό ότι η κατανομή Poisson χρησιμοποιείται για την περιγραφή της συμπεριφοράς σπανίων ενδεχομένων, όπως αυτό των τροχαίων ατυχημάτων, του αριθμού των εγκλημάτων κατά της ζωής σε κάποια μεγάλη πόλη, του αριθμού των σεισμικών δονήσεων σε κάποια περιοχή κατά τη διάρκεια συγκεκριμένης χρονικής περιόδου, του αριθμού των πυρκαγιών που σημειώνονται σε περιοχή που εξυπηρετείται από ένα σταθμό πυροσβεστικής υπηρεσίας, του αριθμού των θανάτων μεταξύ των ασφαλισμένων μεγάλης ασφαλιστικής εταιρείας κ.λ.π.

4.7 Υπεργεωμετρική Κατανομή

Στα παλαιότερα χρόνια οι περιβολάρηδες της Χίου, είχαν στα περιβόλια τους στέρνες στις οποίες αποθήκευαν νερό για να ποτίζουν τα δένδρα τις ξερές μέρες του καλοκαιριού. Στις στέρνες αυτές συνήθιζαν να διατηρούν χρυσόψαρα που χρησίμευαν για τον καθαρισμό του νερού από μικροοργανισμούς που αναπτύσσονταν σ' αυτό.

Σε στέρνα ενός περιβολιού υπήρχαν **δύο είδη** ψαριών, κοκκινόψαρα (είδος Α) και μαυρόψαρα ή όπως λέγονται διαφορετικά γουρλομάτες (είδος Β).

Τα ψάρια στη στέρνα είναι συνολικά **Ν** ενώ είναι γνωστό ότι υπάρχουν **α** από το πρώτο και **β** από το δεύτερο είδος.

Ο γιος του περιβολάρη συνήθιζε να παίζει στο περιβόλι ψαρεύοντας στη στέρνα. Το πρωί μιας ημέρας που πήγαινε για ψάρεμα στην στέρνα του περιβολιού, συνάντησε φίλο του με τον οποίο στοιχημάτισε ότι το μεσημέρι που θα επέστρεφε στο σπίτι, στα **ν** ψάρια που θα είχε στο καλάθι τα **x** θα ήταν κοκκινόψαρα.

«Ποια πιθανότητα έχω, σκέφτηκε απομακρυνόμενος από το φίλο του, να κερδίσω το στοίχημα;»

Ο συνολικός αριθμός ψαριών στην στέρνα είναι **Ν** και ο συνολικός αριθμός ψαριών στο καλάθι του θα είναι **ν.**

Από τα **Ν** ψάρια της στέρνας τα **α** είναι **κόκκινα** και τα **β** είναι **μαύρα**.

Στα **ν** ψάρια του καλαθιού θέλει να υπάρχουν **x κόκκινα** και άρα **ν-x μαύρα.**

Σχηματικά οι συνθέσεις του πληθυσμού των ψαριών της στέρνας και του δείγματος δίνονται με την βοήθεια του πίνακα:

	Κόκκινα	Μαύρα	Σύνολο
Στέρνα	α	β	Ν
Καλάθι	x	ν-x	ν

Το πρώτο ψάρι πιάνεται στο αγκίστρι του παιδιού και πριν το βγάλει στην επιφάνεια, σκέφτεται ότι η πιθανότητα να είναι κόκκινο ισούται με το πηλίκο **α/Ν**, ενώ η πιθανότητα να είναι μαύρο ισούται με **β/Ν.**

Βγάζοντας το ψάρι στην επιφάνεια βλέπει ότι είναι **μαύρο**, το ρίχνει στο καλάθι και ξαναρίχνει το αγκίστρι, σκεπτόμενος ότι η πιθανότητα να πιάσει αυτή την φορά κοκκινόψαρο είναι **α/(Ν-1)** και μαυρόψαρο **(β-1)/(Ν-1).**

Στο συμπέρασμα αυτό κατέληξε αφού **ένα** από τα **Ν** ψάρια της στέρνας και μάλιστα **μαύρο** ήταν ήδη στο καλάθι του.

Παρακολουθώντας το παιχνίδι του παιδιού διαπιστώνουμε ότι η **πιθανότητα κάθε δοκιμής** να καταλήξει σε επιτυχία (να πιάσει δηλαδή κοκκινόψαρο) **δεν παραμένει σταθερή.**

Η τελευταία αυτή **παρατήρηση** είναι **σημαντική.**

Το γεγονός της μεταβαλλόμενης πιθανότητας επιτυχίας σε κάθε δοκιμή αποκλείει την περίπτωση διωνυμικού και γεωμετρικού πειράματος, αφού σε αυτά τα πειράματα η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή πρέπει να είναι σταθερή.

Πως μπορεί λοιπόν να υπολογιστεί η πιθανότητα που ζητάει;

Με τη βοήθεια του κεφ.2 μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής :

1. Οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να έχει **ν** ψάρια στο καλάθι από τα **N** της στέρνας είναι οι συνδυασμοί : $\binom{N}{\nu} = \frac{N!}{\nu!(N-\nu)!}$.
2. Οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να έχει **x** κοκκινόψαρα από τα **α** της στέρνας είναι οι συνδυασμοί : $\binom{\alpha}{x} = \frac{\alpha!}{x!(\alpha-x)!}$.
3. Οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να έχει **ν-x** μαύρα ψάρια από τα **β** της στέρνας είναι οι συνδυασμοί : $\binom{\beta}{\nu - x} = \frac{\beta!}{(\nu-x)!x!}$

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να πιάσει τα **x** κοκκινόψαρα επί τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορεί να πιάσει τα **ν-x** μαύρα ψάρια βρίσκουμε:

$$\binom{\alpha}{x}\cdot\binom{\beta}{\nu-x}$$

που δίνει τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους στα **ν** ψάρια του καλαθιού τα **x** θα είναι κοκκινόψαρα και τα **β-x** μαύρα, ή αλλιώς (τις ευνοϊκές περιπτώσεις).

Αν διαιρέσουμε τον αριθμό $\binom{\alpha}{x}\cdot\binom{\beta}{\nu-x}$ των **ευνοϊκών περιπτώσεων** δια του **συνολικού αριθμού** $\binom{N}{\nu}$ των τρόπων με τους οποίους μπορεί να πιάσει **ν** ψάρια από τα **N** βρίσκουμε:

$$\frac{\binom{\alpha}{x}\cdot\binom{\beta}{\nu-x}}{\binom{N}{\nu}}$$

Η διακριτή τ.μ Χ έχει την *υπεργεωμετρική κατανομή* αν η συνάρτηση πιθανότητας δίνεται από την:

$$P[X=x]=\frac{\binom{\alpha}{x}\cdot\binom{\beta}{\nu-x}}{\binom{N}{\nu}}$$

όπου, $\max[0,\nu-\beta]\le x\le \min[\nu,\alpha]$ α, β και ν παράμετροι της κατανομής.

Η τ.μ Χ συμβολίζει και πάλι τον αριθμό των επιτυχιών σε **ν** επαναλαμβανόμενες δοκιμές αλλά η **πιθανότητα επιτυχίας** από δοκιμή σε δοκιμή **δεν παραμένει σταθερή** όπως στις περιπτώσεις των προηγούμενων κατανομών.

Παράδειγμα 15°:

Σε μια στέρνα υπάρχουν μόλις N = 15 ψάρια από τα οποία α = 5 είναι κόκκινα και τα υπόλοιπα β=10 μαύρα.
Ποια είναι η πιθανότητα στα ν = 4 ψάρια που θα πιάσουμε τα 3 να είναι κόκκινα;

Απάντηση
Σύμφωνα με όσα είπαμε η τιμή x=3 αποτελεί τιμή μιας τ.μ που έχει υπεργεωμετρική κατανομή.
Εφαρμόζοντας τον τύπο της συνάρτησης μάζας πιθανότητας βρίσκουμε :

$$P[X=3]=\frac{\binom{5}{3}\binom{10}{4-3}}{\binom{15}{5}}=\frac{100}{3003}=0{,}0333$$

έτσι η πιθανότητα στα τρία ψάρια που θα πιάσουμε το 1 να είναι κόκκινο ισούται με 0,0333 μόνο. (γιατί);

Σημείωση: Αποδεικνύεται ότι : 1. $P[X=x]=\binom{a}{x}\binom{\beta}{\nu-x}/\binom{N}{\nu}>0$

2. $\sum P[X=x]=1$

για όλα τα *x* που ικανοποιούν τη συνθήκη: $\max[0,\nu-\beta]\le x\le \min[\nu,\alpha]$ και άρα η $P[X=x]$ είναι συνάρτηση πιθανότητας.

Στο παράδειγμα 14 με α = 5, β = 10, ν = 3 και N = 15 οι δυνατές τιμές της τ.μ X πρέπει να βρίσκονται μεταξύ max[0,3-10] και min[3,5] δηλαδή μεταξύ 0 και 3. Αυτό άλλωστε είναι αναμενόμενο αφού δεν είναι δυνατό το πλήθος των κόκκινων ψαριών να είναι μεγαλύτερο από τον συνολικό αριθμό ψαριών που θα πιάσουμε.

Παράδειγμα 16°:

Έμπορος ηλεκτρονικών ειδών έχει στην αποθήκη του 100 ραδιοκασετόφωνα από τα οποία τα 95 είναι μαύρα και τα 5 λευκά. Πελάτης κάνει τηλεφωνική παραγγελία για 3 ραδιοκασετόφωνα. Ποια είναι η πιθανότητα να του σταλούν 2 μαύρα και ένα λευκό;

Απάντηση

Στο σύνολο των 100 ραδιοκασετόφωνων υπάρχουν α = 5 λευκά και β = 95 μαύρα.
Ο έμπορος επιλέγει από την αποθήκη ν=3 ραδιοκασετόφωνα και τα στέλνει στον πελάτη.
Ζητάμε την πιθανότητα η τ.μ X του αριθμού των λευκών σε δείγμα ν=3 ραδιοκασετόφωνων να πάρει την τιμή x=1.
Αν σκεφτούμε ότι ο έμπορος κατέβαζε τα ραδιοκασετόφωνα από το ράφι ένα- ένα, η πιθανότητα p κάθε φορά να επιλέξει λευκό, άλλαζε.
Η αρχική σκέψη που ίσως μπορεί κάποιος να κάνει, ότι δηλαδή η διωνυμική ή η γεωμετρική κατανομή είναι κατάλληλη στην περίπτωσή μας, πρέπει να εγκαταλειφθεί ακριβώς επειδή **η πιθανότητα p μεταβάλλεται.**
Η κατάλληλη κατανομή για την περίπτωση είναι η υπεργεωμετρική με εφαρμογή της οποίας βρίσκουμε:

$$P[X=1]=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{95}{2}}{\binom{100}{3}}=\frac{5\cdot 4465}{161700}=0{,}1380$$

Σημείωση: Αν η διακριτή τ.μ X έχει την υπεργεωμετρική κατανομή τότε:

$$E[X]=\nu\frac{\alpha}{N} \quad \text{και} \quad Var[X]=\nu\frac{\alpha}{N}(1-\frac{\alpha}{N})(\frac{N-\nu}{N-1})$$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

- $X \sim B(\nu, p)$ σημαίνει ότι η τ.μ. X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$\boxed{P[X = x] = \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x}}$$

όπου $x=0, 1, 2, .., \nu$

και $q=1-p$

- Αν $X \sim B(\nu, p)$, τότε : $E[X] = \nu p$ και $V[X] = \nu pq$

- Αν $X \sim \Gamma(p)$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας είναι :

$$P[X=x] = q^{x-1}p, \qquad \text{με } x = 1, 2, \ldots \qquad q=1-p$$

και $E[X] = \dfrac{1}{p}$ και $V[X] = \dfrac{q}{p^2}$, $q = 1 - p$

- $X \sim P(\lambda)$ σημαίνει ότι η τ.μ. X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$\boxed{P[X = x] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}, \qquad x=0, 1, 2, \ldots$$

- Αν $X \sim P(\lambda)$, τότε $E[X] = Var[X] = \lambda$

- Προσέγγιση της $P(\lambda)$ στην $B(\nu, p)$, αν το ν είναι μεγάλο και το p μικρό, τότε η $B(\nu, p)$ προσεγγίζεται από την $P(\lambda = \nu p)$

- Αν η τ.μ. X έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$P[X = x] = \frac{\binom{\alpha}{x} \cdot \binom{\beta}{\nu - x}}{\binom{N}{\nu}}, \text{ όπου } \max[0, \nu - \beta] \le x \le \min[\nu, \alpha]$$

τότε έχει υπεργεωμετρική κατανομή με :

$$E[X] = \nu \frac{\alpha}{N} \quad \text{και} \quad \boxed{V[X] = \nu \frac{\alpha}{N}\left(1 - \frac{\alpha}{N}\right) \cdot \left(\frac{N - \nu}{N - 1}\right)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκήσεις Διωνυμικής X~B(ν, p)

Δ.1 Η τ.μ. X έχει την ακόλουθη κατανομή πιθανότητας:

x	0	1	2	3
P[X=x]	0,4	0,3	0,2	0,1

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η τ.μ. ακολουθεί διωνυμική κατανομή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Δ.2 Στρίβουμε νόμισμα 5 φορές και σημειώνουμε με x τον αριθμό των φορών που εμφανίζεται κεφάλι.
α) Είναι η διαδικασία αυτή διωνυμικό πείραμα;
β) Γράψτε την κατανομή πιθανότητας.
γ) Βρείτε τις πιθανότητες των δυνατών τιμών της τ.μ. X.

Δ.3 Παίκτης του μπάσκετ έχει 80% επιτυχία στις ελεύθερες βολές.
Στον τελικό του πρωταθλήματος, η ομάδα του είναι πίσω στο score 2 πόντους και 1 δευτερόλεπτο πριν την σειρήνα λήξης, ο διαιτητής σφυρίζει φάουλ υπέρ του, σε προσπάθεια που έκανε ο παίκτης να πετύχει τρίποντο.
Ποια η πιθανότητα η ομάδα του να κερδίσει τον τελικό;

Δ.4 Ο διευθύνων σύμβουλος μιας εταιρείας είχε την αποκλειστική ευθύνη λήψης αποφάσεων που αφορούσαν την πολιτική της εταιρείας.
Ο συγκεκριμένος σύμβουλος κάθε φορά που είναι απαραίτητο παίρνει σωστή απόφαση με πιθανότητα p.
Μετά την αλλαγή του καταστατικού της εταιρείας, οι αποφάσεις που αφορούν την πολιτική της λαμβάνονται με την πλειοψηφία των 2/3, 3μελούς διοικητικού συμβουλίου.
α) Κάθε μέλος του συμβουλίου αποφασίζει ανεξαρτήτως των άλλων δύο μελών, με πιθανότητα σωστής απόφασης ίση με p.
Ποια είναι η πιθανότητα, η απόφαση του διοικητικού συμβουλίου να είναι σωστή;
β) Αν p=0,1 , ποια η πιθανότητα το διοικητικό συμβούλιο να πάρει σωστή απόφαση;

γ) Για ποια τιμή της p, η πιθανότητα το διοικητικό συμβούλιο να πάρει σωστή απόφαση με βάση τον κανόνα της πλειοψηφίας των 2/3, είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα του διευθύνοντος συμβούλου να πάρει σωστή απόφαση;
δ) Για ποια τιμή της p, είναι η πιθανότητα σωστής απόφασης η ίδια για το διοικητικό συμβούλιο και το διευθύνοντα σύμβουλο:

Δ.5 Υποθέτουμε ότι ένα μέλος του διοικητικού συμβουλίου, της άσκησης (4), παίρνει την απόφασή του, αφού πρώτα ρίξει ένα ζάρι. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός, τότε ψηφίζει υπέρ της πρότασης που συζητείται στο συμβούλιο και αν το αποτέλεσμα είναι περιττός αριθμός, τότε ψηφίζει κατά της πρότασης.
Τα άλλα δύο μέλη του συμβουλίου αποφασίζουν ανεξαρτήτως, με πιθανότητα σωστής απόφασης ίση με p.
α) Ποια είναι η πιθανότητα η πλειοψηφία του τριμελούς διοικητικού συμβουλίου να είναι σωστή ;
β) Αν p=0,1 , ποια η πιθανότητα το διοικητικό συμβούλιο να πάρει σωστή απόφαση ;
γ) Για ποια τιμή της p, η πιθανότητα το διοικητικό συμβούλιο να πάρει σωστή απόφαση με βάση τον κανόνα της πλειοψηφίας των 2/3, είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα του διευθύνοντος συμβούλου να πάρει σωστή απόφαση ;
δ) Για ποια τιμή της p είναι η πιθανότητα σωστής απόφασης η ίδια για το διοικητικό συμβούλιο και τον διευθύνοντα σύμβουλο ;

Ασκήσεις Υπεργεωμετρικής

Υ.1 Σε κουτί με 10 κενά CD, 3 είναι ελαττωματικά. Παίρνουμε δύο κενά CD στην τύχη, χωρίς επανατοποθέτηση και συμβολίζουμε με X τον αριθμό των ελαττωματικών CD στο δείγμα των ν = 2.
Εξηγήστε γιατί η X δεν ακολουθεί διωνυμική κατανομή.

Υ.2 Ποια είναι η πιθανότητα σε δείγμα ν = 4 CD της προηγούμενης άσκησης που πάρθηκε χωρίς επανατοποθέτηση, να μην υπάρχει ελαττωματικό CD ;
Πόσο αλλάζει (αν αλλάζει) η πιθανότητα αυτή, στην περίπτωση που το δείγμα των ν = 4 CD ληφθεί με επανατοποθέτηση ;
Ποια είναι (αν υπάρχει) η διαφορά των δύο πιθανοτήτων; Ποια είναι μεγαλύτερη ;

Ασκήσεις Γεωμετρικής

Γ.1 Ποια η πιθανότητα κατά το στρίψιμο ενός νομίσματος, το οποίο φέρνει κεφαλή (Κ) και γράμματα (Γ) με την ίδια πιθανότητα, να εμφανιστούν γράμματα για πρώτη φορά στο τέταρτο στρίψιμο ;

Γ.2 Ο παίκτης Α του μπάσκετ έχει ευστοχία 75% στις ελεύθερες βολές. Στο παιχνίδι που παίζει αυτή τη στιγμή, παίκτης της αντίπαλης ομάδας υπέπεσε σε φουλ στην προσπάθειά του ν' ανακόψει βολή του Α για τρίποντο.
Ποια είναι η πιθανότητα ο Α να έχει τις δύο πρώτες ελεύθερες βολές αποτυχημένες και την τρίτη επιτυχημένη ;

Γ.3 Αθλητής του ύψους υπερπηδά στην προπόνηση το ύψος των 225cm με πιθανότητα p=0,35.
Ποια η πιθανότητα του αθλητή να περάσει το ύψος στην 4η προσπάθεια ;
Αν με Χ συμβολίσουμε τον αριθμό των προσπαθειών πριν περάσει το ύψος, ποια είναι η Ε[Χ] ;

Γ.4 Ο αθλητής της προηγούμενης άσκησης, βελτίωσε μετά από σκληρή προπόνηση την τεχνική του, με συνέπεια η πιθανότητα υπερπήδησης του ύψους των 225cm ν' αυξηθεί σε p=0,40.

α) Ποια η πιθανότητα :
   1) σε 10 προσπάθειες να έχει 6 επιτυχημένες ;
   2) σε 10 προσπάθειες να υπερπηδήσει το ύψος των 225cm για πρώτη φορά στην έκτη προσπάθεια ;

β) Αν το πρόγραμμα της προπόνησης περιλαμβάνει 20 προσπάθειες στο ύψος των 225cm, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός επιτυχημένων προσπαθειών του αθλητή ;

γ) Ποια η πιθανότητα σε 50 προσπάθειες στο ύψος των 225cm να έχει 25 επιτυχημένες ;

Γ.5 Εν όψει της Ολυμπιάδας του 2004, ο προπονητής του άλτη εντατικοποίησε την προπόνηση ανεβάζοντας τον πήχη στα 238cm, ύψος κατά 2cm μεγαλύτερο της ατομικής επίδοσης του αθλητή.
Η μεγάλη εμπειρία του προπονητή του επιτρέπει να εκτιμήσει ότι, αθλητές με τα προσόντα του αθλητή του έχουν πιθανότητα p=0,009 να υπερπηδήσουν το ύψος των 238cm σε κάθε προσπάθεια.
Αν σε κάθε χρόνο, ο αθλητής κάνει 150 ημέρες προπόνηση και κάθε μέρα προσπαθεί να υπερπηδήσει το ύψος 3 φορές, ποια η πιθανότητα να υπερπηδήσει το ύψος των 238cm μέχρι τους Ολυμπιακούς του 2004 ;

Ασκήσεις Poisson

Στις ερωτήσεις 1-4 η τ.μ. Χ ακολουθεί Poisson με παράμετρο λ.

Ρ.1 Αν $\lambda=2$, να βρεθούν i) $P[X=0]$, ii) $P[X=1]$, iii) $P[X=2]$, iv) $P[X \leq 2]$, v) $P[X \geq 2]$.

Ρ.2 Αν $\lambda=0,5$,να βρεθούν i) $P[X<3]$, ii) $P[2 \leq X \leq 4]$, iii) $P[1<X<3]$, iv) $P[X \geq 3]$

Ρ.3 Αν $\lambda=5$, να βρεθούν i) $P[X=5]$, ii) $P[X<5]$, iii) $P[X>5]$

Ρ.4 Αν $\lambda=2,1$ και $P[X=r]=0,1890$ να βρεθεί η τιμή του r.

Ρ.5 Ο αριθμός ολόκληρων φουντουκιών σε σοκολάτες συγκεκριμένης γνωστής σοκολατοβιομηχανίας αποτελεί τιμή τ.μ. Χ που ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο 5,6. Να βρεθεί η πιθανότητα η σοκολάτα που θα αγοράσετε να περιέχει:

α) λιγότερα από 4 φουντούκια

β) περισσότερα των 4 και λιγότερα των 7 φουντουκιών.

Ρ.6 Στο νερό λίμνης περιέχονται κατά μέσο όρο 500 βακτηρίδια ανά λίτρο. Από βαρέλι καλά ανακατεμένου νερού της λίμνης, εξετάστηκε δείγμα $1cm^3$ (1 λίτρο=$1000cm^3$).

Να βρεθεί :

α) Η πιθανότητα να μην υπάρχουν βακτηρίδια στο δείγμα.

β) Η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 4 βακτηρίδια στο δείγμα.