ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Κατανομές Πιθανότητας

Εισαγωγή
Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.)
Συνάρτηση πιθανότητας διακριτής τ.μ.
Κατανομή πιθανότητας διακριτής τυχαίας μεταβλητής
Συνάρτηση κατανομής διακριτής τυχαίας μεταβλητής
Γραφική παράσταση διακριτών κατανομών
Το διάγραμμα της συνάρτησης κατανομής διακριτής τ.μ.X
Εκτίμηση κατανομών πιθανότητας
Αναμενόμενη τιμή διακριτής τ.μ. X
Αναμενόμενη τιμή της X^2
Η διακύμανση διακριτής τ.μ. X
Η τυπική απόκλιση τ.μ. X
Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας(σ.π.π) μιας συνεχούς τ.μ.
Ιδιότητες της σ.π.π.
Η συνάρτηση κατανομής συνεχούς τ.μ.
Η ομοιόμορφη κατανομή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

3.1 Εισαγωγή

Σε πολλούς τύπους πειραμάτων τα αποτελέσματα είναι από τη φύση τους πραγματικοί αριθμοί. Παραδείγματα τέτοιων πειραμάτων αποτελούν οι μετρήσεις των υψών και των βαρών των ατόμων, η παρακολούθηση των τιμών της αγοράς και της ζήτησης ενός προϊόντος, η μέτρηση του αριθμού των χιλιομέτρων που διανύει ένα αυτοκίνητο με 10 λίτρα βενζίνης, η διαφορά πόντων σε ένα παιχνίδι μπάσκετ κ.λ.π.

Οι **δειγματικοί χώροι** αυτών των πειραμάτων είναι **υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών**.

Υπάρχουν επίσης πειράματα των οποίων τα αποτελέσματα δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, με συνέπεια ο δειγματικός τους χώρος να μην είναι υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Παραδείγματα τέτοιων πειραμάτων αποτελούν το στρίψιμο νομίσματος με δυνατά αποτελέσματα κεφάλι ή γράμματα, η διαπίστωση της ποιότητας ενός προϊόντος που επιλέγουμε τυχαία από κάποια γραμμή παραγωγής, η διαδικασία εντόπισης των ελαττωματικών εξαρτημάτων μιας μηχανής, η βλάβη των οποίων προκαλεί βλάβη της μηχανής κ.λ.π. Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων δεν είναι πραγματικοί αριθμοί και συνεπώς οι **δειγματικοί τους χώροι δεν είναι υποσύνολα** του R.

Αποδεικνύεται όπως θα δούμε στην πράξη ότι η μετατροπή αυτών των δειγματικών χώρων σε δειγματικούς χώρους με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς είναι εξαιρετικά χρήσιμη και επιτυγχάνεται με την **αντιστοίχιση** ενός πραγματικού αριθμού σε κάθε αποτέλεσμα του αρχικού δειγματικού χώρου.

Μια τέτοια διαδικασία μπορεί να χαρακτηριστεί ως **«κωδικοποίηση»** των αποτελεσμάτων ενός πειράματος με τη χρήση πραγματικών αριθμών.

Υπάρχουν περιπτώσεις που το ενδιαφέρον μας δεν είναι άμεσο για τα ίδια τα αποτελέσματα του πειράματος, αλλά για κάποιο μετασχηματισμό ή και συνδυασμό αυτών των αποτελεσμάτων.

Παράδειγμα έμμεσου ενδιαφέροντος για τα αποτελέσματα ενός πειράματος αποτελεί ένα ποδοσφαιρικό παιχνίδι, στο τέλος του οποίου σημασία έχει η νίκη και όχι ο αριθμός των τερμάτων που πέτυχε ή νικήτρια ομάδα.

Άλλο παράδειγμα αποτελεί το ενδιαφέρον εταιρείας επωνύμων προϊόντων να υπολογίσει το κέρδος από την πώληση του προϊόντος της μετά από μια καλοσχεδιασμένη διαφημιστική καμπάνια. Στην περίπτωση αυτή η εταιρεία ενδιαφέρεται για τη συνολική είσπραξη (γινόμενο τιμής του προϊόντος επί την ποσότητα που πουλήθηκε) και όχι για την τιμή και την ποσότητα χωριστά.

Όλα όσα αναφέραμε περιέχουν την έννοια της **τυχαίας μεταβλητής** που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να χαρακτηρίσει τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος ως στοιχεία ενός συνόλου πραγματικών αριθμών.

3.2 Τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)

Από όσα προηγήθηκαν γίνεται φανερό ότι αν τα αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε μπορούμε να περιγράψουμε το πείραμα με τη βοήθεια τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.).

Ας πάρουμε για παράδειγμα το γνωστό πείραμα ρίψης του ζαριού με σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και ας συμβολίσουμε με Χ το αποτέλεσμα της ρίψης. Το Χ είναι τυχαία μεταβλητή.

Με τη βοήθεια αυτής της τυχαίας μεταβλητής μπορούμε να ορίσουμε π.χ. το ενδεχόμενο «το ζάρι έδειξε τέσσερις τελείες» ως το ενδεχόμενο $\{X=4\}$.

Στο παράδειγμα αυτό ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος και το σύνολο R_X των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής Χ είναι δύο πεπερασμένα σύνολα με ίσο αριθμό στοιχείων.

Σαν δεύτερο παράδειγμα ας πάρουμε ένα νόμισμα και ας υποθέσουμε ότι το στρίβουμε έως ότου εμφανιστεί για πρώτη φορά κεφάλι (Κ).

Ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{Κ, ΓΚ, ΓΓΚ, ΓΓΓΚ, ΓΓΓΓΚ, ...\}$ δεν είναι πεπερασμένος και αν με Υ συμβολίσουμε το στρίψιμο κατά το οποίο εμφανίζεται κεφάλι για πρώτη φορά, η Υ είναι τυχαία μεταβλητή με σύνολο δυνατών τιμών το

$$\mathbf{R_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}.}$$

Τέλος, για τον υπολογισμό της κατανάλωσης ενός αυτοκινήτου μετράμε συνήθως την ποσότητα καυσίμου που απαιτείται για την κάλυψη απόστασης 100 Km.

Στο πείραμα αυτό ο δειγματικός χώρος Ω είναι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας. Το σύνολο R_Z των δυνατών τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής Z που συμβολίζει την απαιτούμενη ποσότητα καυσίμου σε λίτρα, είναι επίσης διάστημα της πραγματικής ευθείας με τιμές, ταυτόσημες με τις τιμές των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω.

Στα δύο πρώτα παραδείγματα τα σύνολα τιμών R_X και R_Y των τυχαίων μεταβλητών Χ και Υ έχουν ως στοιχεία **μεμονωμένα σημεία αριθμητικού συνόλου**, ενώ στο τρίτο παράδειγμα το σύνολο τιμών R_Z της τυχαίας μεταβλητής Z είναι ένα **συνεχές διάστημα** τιμών.

Οι τυχαίες μεταβλητές Χ και Υ (οι τιμές των οποίων μπορούν να γραφούν με τη μορφή λίστας) καλούνται **διακριτές τυχαίες μεταβλητές**, ενώ η μεταβλητή Z καλείται **συνεχής τυχαία μεταβλητή**. Οι συνεχείς τ.μ. μελετώνται διεξοδικά στην παράγραφο 3.10.

Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_v\}$ ο δειγματικός χώρος ενός τυχαίου πειράματος, ορίζουμε ως *τυχαία μεταβλητή* (τ.μ.) Χ κάθε συνάρτηση, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο ω του δειγματικού χώρου έναν πραγματικό αριθμό Χ(ω).

Σε ότι ακολουθεί με κεφαλαία γράμματα Χ, Υ, Ζ, … συμβολίζουμε τις τ.μ. και με μικρά x, y, z, … τις δυνατές τιμές τους.

Παράδειγμα 1°:

Ο δειγματικός χώρος που αντιστοιχεί στο τυχαίο πείραμα του στριψίματος δύο ίδιων νομισμάτων είναι : $\Omega = \{(\Gamma,\Gamma), (\Gamma,Κ), (Κ,\Gamma), (Κ,Κ)\}$, όπου Γ συμβολίζουμε το ενδεχόμενο «Γράμματα» και με Κ το ενδεχόμενο «Κεφαλή».

Αν με Χ συμβολίσουμε τον αριθμό των κεφαλών Κ, να δειχθεί ότι το $R_X = \{0, 1, 2\} \subseteq R$ είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της τ.μ. Χ.

Απάντηση

Πράγματι, κάθε δειγματικό σημείο του χώρου Ω απεικονίζεται με την βοήθεια της τ.μ. Χ σε ένα εκ των αριθμών 0, 1 ή 2.

Συγκεκριμένα, $Χ(\Gamma,\Gamma) = 0$ $Χ(\Gamma,Κ) = 1$ $Χ(Κ,\Gamma) = 1$ και $Χ(Κ,Κ) = 2$.

Από την αντιστοίχιση αυτή είναι φανερό ότι τα σύνολα $\{Χ=1\}$ και $\{(\Gamma,Κ), (Κ,\Gamma)\}$ περιγράφουν το ίδιο ενδεχόμενο, σύμφωνα με τον τρόπο ορισμού της τ.μ. Χ.

Η *τυχαία μεταβλητή* Χ είναι *διακριτή* αν το σύνολο των δυνατών τιμών της έχει ως στοιχεία μεμονωμένα σημεία αριθμητικού συνόλου.

Ένας εναλλακτικός ορισμός του 3.2 είναι ο ακόλουθος :

Η *τυχαία μεταβλητή* Χ είναι *διακριτή* αν το σύνολο R_X των δυνατών τιμών της είναι πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο*.

* Σύνολο R_X καλείται απείρως αριθμήσιμο αν τα στοιχεία του μπορούν να απαριθμηθούν με τη βοήθεια των ακέραιων θετικών αριθμών.

Με τον ορισμό αυτό είναι φανερό ότι τιμές όπως

…	-5	-4	-3	-2	…
…	3,5	4,5	5,5	6,5	… ή
…	1,25	1,75	2,25	2,75	… κ.λ.π.

μπορούν να είναι τιμές μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

3.3 Συνάρτηση πιθανότητας διακριτής τ.μ.

Όπως ξέρουμε, σε κάθε δειγματικό σημείο ω_i του δειγματικού χώρου $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_v, \ldots\}$ αντιστοιχίζουμε την πιθανότητα $P(\omega_i)$ για την οποία ισχύουν :

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_v) \ldots = 1$

Κάθε δειγματικό σημείο αποτελεί και ένα ενδεχόμενο το οποίο λέγεται **απλό ενδεχόμενο**. Συλλογή συγκεκριμένων απλών ενδεχομένων αποτελεί **σύνθετο ενδεχόμενο**.

Μπορούμε συνεπώς τώρα να ορίσουμε το ενδεχόμενο ως συλλογή δειγματικών σημείων. Ένα ενδεχόμενο Α περιέχει ως στοιχεία του, αυτά που εξασφαλίζουν την εμφάνισή του.

Η τ.μ. Χ απεικονίζει κατά τον ορισμό κάθε δειγματικό σημείο ω_i σε έναν πραγματικό αριθμό x_j. Αν σκεφτούμε όμως ότι σε κάθε ω_i αντιστοιχεί πιθανότητα $P(\omega_i)$, είναι λογικό να ισχυριστούμε ότι στον πραγματικό αριθμό x_j αντιστοιχεί πιθανότητα $P(x_j)$. Με βάση αυτή τη λογική το σύνολο $R_X = \{x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_k, \ldots\}$ των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής Χ είναι δειγματικός χώρος της Χ, αφού οι x_j είναι τελικώς αποτέλεσμα κάποιου τυχαίου πειράματος.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον ορισμό της **συνάρτησης πιθανότητας** μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

Η συνάρτηση με την οποία σε κάθε σημείο x_i του δειγματικού χώρου $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\ldots\}$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ αντιστοιχίζουμε πιθανότητα P_i, καλείται *συνάρτηση πιθανότητας* και συμβολίζεται με $P[X=x_j]$ ή συντομότερα με p_j για j=1, 2, .., k…

Επειδή το $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\ldots\}$ είναι δειγματικός χώρος, είναι γνωστό ότι $P(R_X) = P\{x_1, x_2, \ldots, x_k\ldots\} = p_1 + p_2 + \ldots + p_k \ldots = 1$.

Συμπερασματικά καταλήγουμε στο ακόλουθο:

Κάθε συνάρτηση μάζας πιθανότητας είναι συνάρτηση που παίρνει μη αρνητικές τιμές (p_j), το άθροισμα των οποίων ισούται με τη μονάδα..

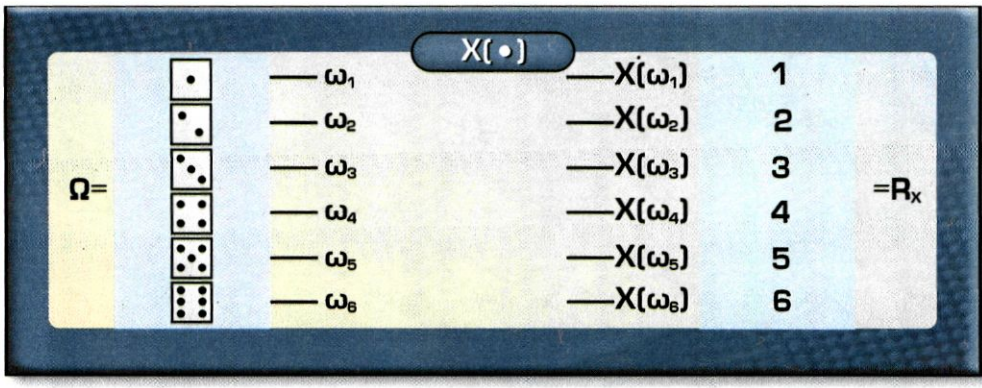
- $P[X = x_j] = p_j \geq 0 \qquad$ για $j = 1, 2, .., \kappa \ldots$
- $\sum p_j = 1$

Παράδειγμα 2^0:

Το στρίψιμο του ζαριού έχει δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, όπου

$\omega_1=$, $\omega_2=$, $\omega_3=$, $\omega_4=$, $\omega_5=$, $\omega_6=$

Αν με X συμβολίσουμε το αποτέλεσμα που φέρνει το ζάρι, τότε η X είναι τ.μ. που απεικονίζει τα δειγματικά σημεία ω του Ω στα στοιχεία x του δειγματικού χώρου $R_X=\{1,2,3,4,5,6\}$, δηλαδή :



ποθέτουμε ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο και συνεπώς κάθε αποτέλεσμα έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί.

$$\text{Άρα : } P[X = x_j] = p_j = \frac{1}{6} \qquad \text{για } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\text{και} \quad \sum p_j = 1$$

οπότε η $P[X=x_j]$ είναι συνάρτηση μάζας πιθανότητας.

Παράδειγμα 3°:

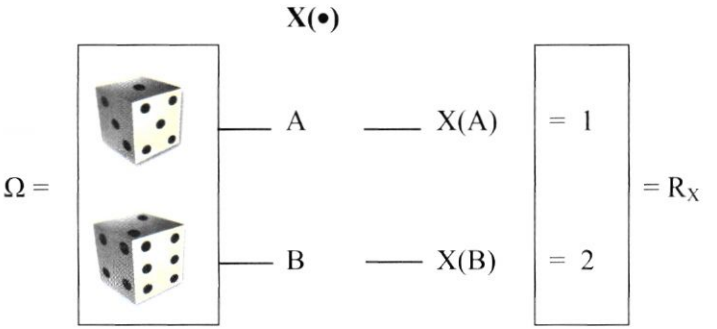
Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X έτσι ώστε αν το αποτέλεσμα του ζαριού είναι περιττός αριθμός (ενδεχόμενο Α) η X να είναι ίση με 1, ενώ αν το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός (ενδεχόμενο Β) η X να είναι ίση με 2. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των Α και Β.

Απάντηση

Μπορούμε στην περίπτωση αυτή να θεωρήσουμε το ενδεχόμενο Α, ως Α={ } και το Β,

ως Β = { } και συνεπώς $A \cup B$ = { } ∪ { } = { , } = Ω.

Σύμφωνα με τον τρόπο που ορίσαμε την τ.μ. X έχουμε :



και υποθέτοντας ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β και άρα των τιμών 1 και 2 της τ.μ. X.

Πράγματι, $P(A) = P\{1,3,5\} = P[X=1] = P\{1\} + P\{3\} + P\{5\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$$P(B) = P\{2,4,6\} = P[X=2] = P\{2\} + P\{4\} + P\{6\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Στο παράδειγμα αυτό βλέπουμε ότι ο δειγματικός χώρος R_X της τ.μ. X περιέχει δύο μόνο δειγματικά σημεία, συγκεκριμένα το 1 και το 2, που αποτελούν τις «εικόνες» των δύο ενδεχομένων Α και Β του Ω στον R_X.

3.4 Κατανομή πιθανότητας διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Αν Χ διακριτή τ.μ. με τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ και $P[X=x_j] = p_j$ με $j = 1, 2, \ldots, κ, \ldots$ η συνάρτηση πιθανότητας, τότε έχουμε τον ακόλουθο ορισμό της κατανομής πιθανότητας.

Ονομάζεται ***κατανομή πιθανότητας*** της διακριτής τ.μ. Χ το σύνολο των ζευγών (x_j, p_j), όπου p_j η πιθανότητα της τ.μ. Χ να πάρει την τιμή x_j.

Είναι τις περισσότερες φορές πρακτικό και εύκολο να παρουσιάζουμε μία κατανομή πιθανότητας με τη βοήθεια ενός πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής πιθανότητας**, η γενική μορφή του οποίου είναι:

ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

x_j	x_1	x_2	...	x_k	...
p_j	p_1	p_2	...	p_k	...

Για το παράδειγμα του ζαριού, ο πίνακας της κατανομής πιθανότητας είναι:

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Παράδειγμα 4ο:

Η διακριτή τ.μ. Χ έχει κατανομή πιθανότητας :

x_j	1	2	3	4
p_j	1/3	1/3	α	1/4

Να βρεθεί η τιμή του α.

Απάντηση

Αφού πρόκειται για κατανομή πιθανότητας διακριτής τ.μ. Χ, η p_j πρέπει να είναι μη αρνητική και το άθροισμα όλων των τιμών της να ισούται με μονάδα.

Η σταθερά α πρέπει να είναι μη αρνητική ($\alpha \geq 0$) και το άθροισμα

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\alpha+\frac{1}{4}=1, \text{ από όπου : } \alpha=\frac{1}{12}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του α βρίσκουμε τον πίνακα κατανομής πιθανότητας:

x_j	1	2	3	4
p_j	1/3	1/3	1/12	1/4

3.5 Συνάρτηση κατανομής διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Ένα από τα συνηθέστερα προβλήματα στην πράξη είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας με την οποία η τ.μ. Χ μπορεί να πάρει τιμές μικρότερες ή ίσες κάποιας γνωστής τιμής x_j. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε εκφράσεις της μορφής $P[X \leq x_j]$. Αυτό το πετυχαίνουμε αφού δώσουμε πρώτα τον ακόλουθο ορισμό:

Ορίζουμε ως ***συνάρτηση κατανομής*** της διακριτής τ.μ. Χ με τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ το σύνολο των ζευγών $(x_j, P[X \leq x_j])$, όπου η $P[X \leq x_j]$ είναι το **άθροισμα των πιθανοτήτων** όλων των τιμών της τ.μ. Χ που είναι μικρότερες ή ίσες, της x_j.

Παράδειγμα 5ο:

Όταν ρίχνουμε ένα ζάρι ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε ως αποτέλεσμα έναν αριθμό μικρότερο ή ίσο του 4 ;

Απάντηση

Η πιθανότητα που ζητάμε είναι της μορφής $P[X \leq x_j]$, όπου $x_j = 4$.
Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των τιμών της τ.μ. Χ που είναι μικρότερες ή ίσες του 4.

Έτσι, $P[X\leq 4]=P[X=1]+P[X=2]+P[X=3]+P[X=4]=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Η πιθανότητα, συνεπώς, κατά το στρίψιμο του ζαριού να εμφανιστεί αριθμός μικρότερος ή ίσος του 4 είναι 2/3.

Στο ερώτημα του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί κανείς να αντιπαραθέσει το ερώτημα :
«ποιά είναι η πιθανότητα κατά το στρίψιμο ενός νομίσματος να εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος του 4 ;». Το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί εύκολα αν σκεφτούμε ότι:

$$P[X>4] = P[X=5] + P[X=6] = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Παράδειγμα 6^0:

Η διακριτή τ.μ. Χ έχει την ακόλουθη κατανομή πιθανότητας:

x_j	-1	0	1
p_j	α	$\frac{1}{4}$	α

α σταθερά

α) Να βρεθεί η τιμή α
β) Να βρεθεί η $P(X \geq 0)$

Απάντηση

α) Πρέπει κατά τα γνωστά $\alpha\geq 0$ και το άθροισμα των πιθανοτήτων των τιμών της τ.μ. Χ να είναι μονάδα.

Έτσι έχουμε :

$$\sum p_j = 1 \text{ ή } \alpha+\frac{1}{4}+\alpha=1 \text{ ή } 2\alpha=\frac{3}{4} \text{ και } \alpha = 0{,}375$$

Η κατανομή πιθανότητας για α = 0,375 γίνεται:

x_j	-1	0	1
p_j	0,375	0,250	0,375

β) $P[X\geq 0] = P[X=0] + P[X=1] = 0{,}625$

Παράδειγμα 7ο:

Η τ.μ. Χ έχει την κατανομή πιθανότητας :

x_j	1	5	9
p_j	α	β	γ

Όπου α, β, γ σταθερές.

Αν είναι γνωστό ότι P[X<4] = P[X>4] και P[X≤5] = 2P[X>5], να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ.

Απάντηση

Πρέπει $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$ και

$\sum p_j = 1$ ή $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 1}$ (1)

$P[X < 4] = P[X > 4]$ ή

$P[X \leq 1] = P[X \geq 5]$ ή

$\alpha = P[X = 5] + P[X = 9]$ ή

$\boxed{\alpha = \beta + \gamma}$ (2)

$P[X \leq 5] = 2P[X > 5]$ ή

$P[X = 1] + P[X = 5] = 2P[X = 9]$ ή

$\boxed{\alpha + \beta = \gamma}$ (3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha = \beta + \gamma \\ \alpha + \beta = 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \alpha = \beta + \gamma \\ \beta + \beta + \gamma = 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = 3\beta \\ 2\beta = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{\alpha}{3} \\ \gamma = 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 1/6 \\ \gamma = 1/3 \end{cases}$$

μετά την εύρεση των τιμών των α, β και γ, η κατανομή πιθανότητας γίνεται:

x_j	1	5	9
p_j	1/2	1/6	1/3

Παράδειγμα 8ο:

Η διακριτή τ.μ. Χ έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$P[X=x]=\begin{cases}(1/2)^x, & \text{για } x = 1, 2, 3, 4, 5\\ c, & \text{για } x = 6\\ 0, & \text{για κάθε άλλο } x\end{cases}$$

όπου c σταθερά. Να βρεθεί η τιμή της c.

Απάντηση

Πρέπει :

$$\sum_{x=1}^{5} P(x)=1 \quad \text{ή} \quad \sum_{x=1}^{5} P(x)+c=1 \quad \text{ή}$$

$$c=1-\sum_{x=1}^{5} P(x)=1-\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right] = 0{,}03125$$

3.6 Γραφική Παράσταση Διακριτών Κατανομών

Για την περιγραφή της μορφής και του σχήματος μιας διακριτής κατανομής κατάλληλος τρόπος είναι η χρήση "διαγραμμάτων πιθανότητας".

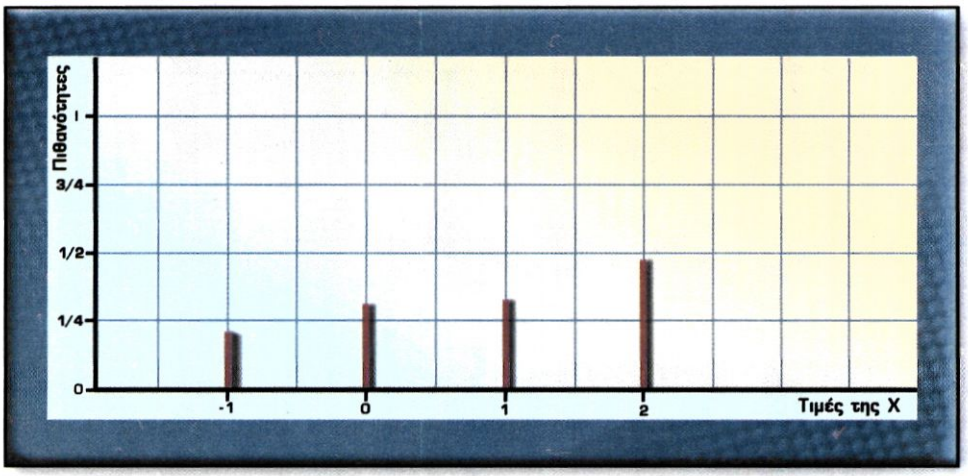
Καλούμε ***διάγραμμα πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής*** τη γραφική παράσταση των ευθύγραμμων τμημάτων με άκρα τα ζεύγη των σημείων $[(x_1, p_1), (x_1, 0)]$, $[(x_2, p_2), (x_2, 0)]$, … $[(x_i, p_i), (x_i, 0)]$ …
όπου $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ οι τιμές της τ.μ. Χ και $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ οι αντίστοιχες πιθανότητες.

Αν λοιπόν, ο πίνακας κατανομής μιας διακριτής τ.μ. Χ είναι π.χ.

x_j	-1	0	1	2
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$

τότε το διάγραμμα πιθανότητας της μεταβλητής είναι η γραφική παράσταση των ευθύγραμμων τμημάτων με άκρα τα ζεύγη των σημείων όπως φαίνεται στο Σχ. (3.1)

$$[(-1, \frac{1}{8}), (-1, 0)],\ [(0, \frac{1}{4}), (0, 0)],\ [(1, \frac{1}{4}), (1, 0)],\ [(2, \frac{4}{8}), (2, 0)]$$



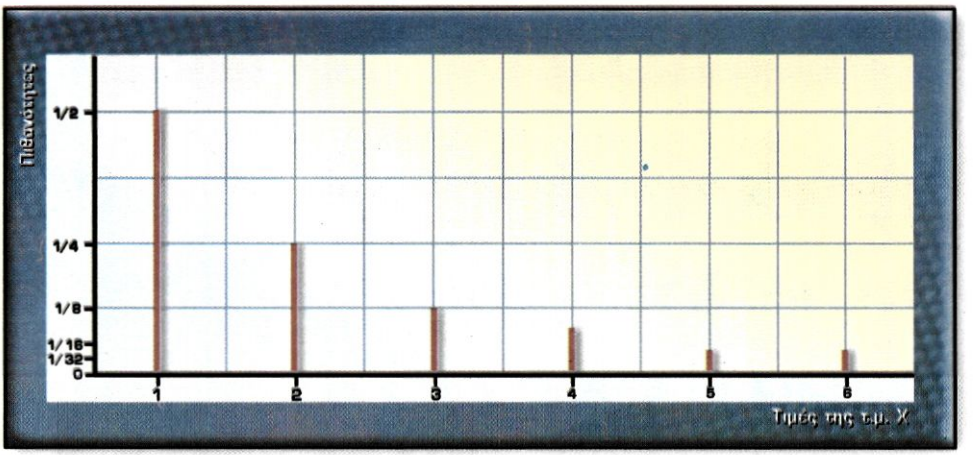
Σχήμα (3.1)

Παράδειγμα 10ο:

Μετά τον υπολογισμό της σταθεράς c του παραδείγματος (3.8), ο πίνακας κατανομής πιθανότητας της τ.μ. X είναι :

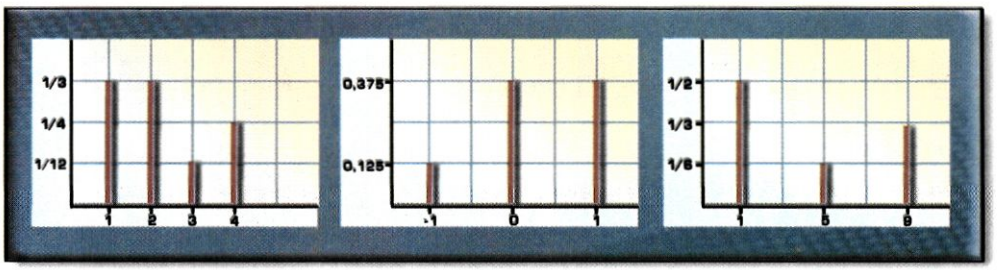
x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	C=0,03125
p_i	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0.03125

Με διάγραμμα πιθανότητας όπως στο Σχ (3.2).



Σχ. (3.2) Διάγραμμα πιθανότητας της κατανομής του παρ. 8.

Κατά εντελώς ανάλογο τρόπο κατασκευάζονται τα διαγράμματα πιθανότητας των παραδειγμάτων (3.4), (3.6) και (3.7), που δίνονται στα Σχ. (3.4α), (3.4β) και (3.4γ) αντιστοίχως.



Σχ. (3.3α) *Σχ. (3.3β)* *Σχ. (3.3γ)*

Παράδειγμα 11°:

Η τ.μ. X ορίζεται ως "το άθροισμα των ενδείξεων δύο ζαριών". Να βρεθεί η κατανομή πιθανότητας της X και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο διάγραμμα πιθανότητας.

Απάντηση

Αρχίζουμε με την κατασκευή του πίνακα των 36 δυνατών αποτελεσμάτων, καθένα εκ των οποίων έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης.

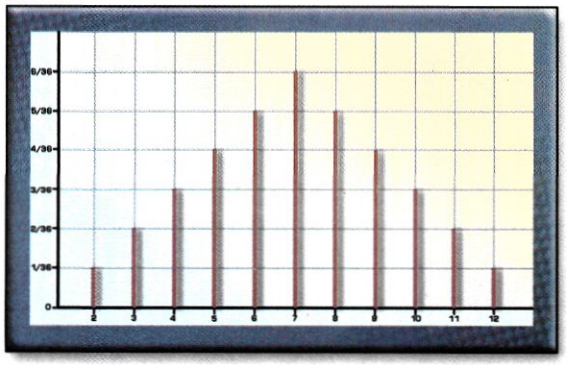
ΠΡΩΤΟ ΖΑΡΙ \ ΔΕΥΤΕΡΟ ΖΑΡΙ	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Τα στοιχεία του πίνακα είναι τα αθροίσματα των ενδείξεων των 2 ζαριών

Παρατηρώντας τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι το σύνολο R_X των δυνατών τιμών της τ.μ. X είναι $R_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες όπως δίνονται στον πίνακα κατανομής.

Τιμές x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Το αντίστοιχο διάγραμμα πιθανότητας είναι η γραφική παράσταση των ευθύγραμμων τμημάτων με άκρα τα σημεία [(2, 1/36) , (2, 0)], [(3, 2/36) , (3, 0)],... [(12, 1/36), (12, 0)].



Σχ. (3.4)

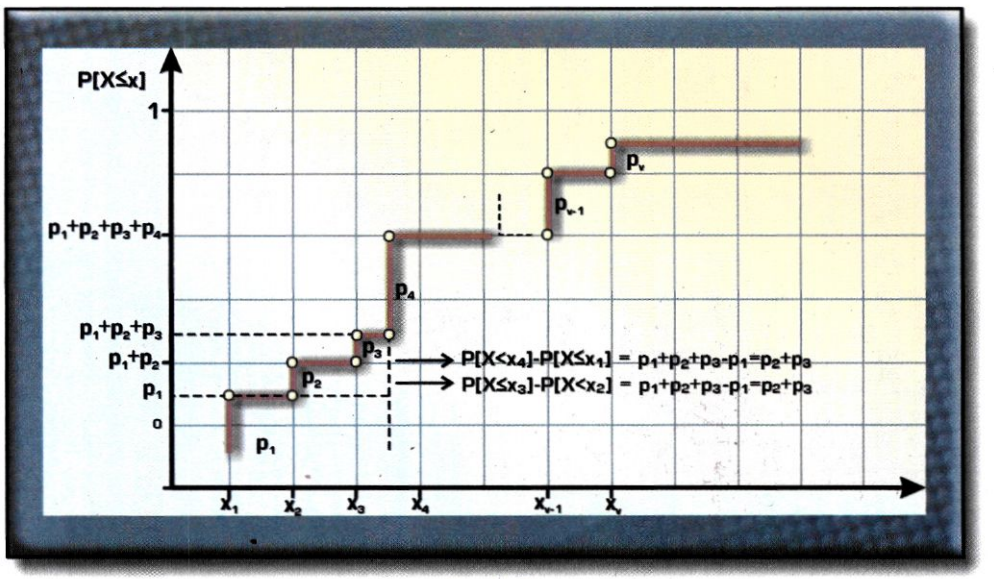
Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η πιθανότερη τιμή της τ.μ. X είναι το 7 με $p_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{2}$ και οι λιγότερο πιθανές το 2 με $p_2 = \frac{1}{6}$ και το 12 με $p_{12} = \frac{1}{6}$.

3.6.1 Το διάγραμμα της συνάρτησης κατανομής διακριτής τ.μ. X

Με βάση τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής μπορούμε να την παρουσιάσουμε αναλυτικά ως εξής :

$$P[X \le x] = \begin{cases} 0 & , \text{για } x < x_1 \\ p_1 & , \text{για } x_1 \le x < x_2 \\ p_1+p_2 & , \text{για } x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ p_1+p_2+\ldots+p_{\nu-1} & , \text{για } x_{\nu-1} \le x < x_\nu \\ p_1+p_2+\ldots+p_\nu = 1 & , \text{για } x \ge x_\nu \end{cases}$$

Από την αναλυτική αυτή έκφραση προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης κατανομής που δίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Σχ. (3.5)

Τα «άλματα» που παρουσιάζει η γραφική της παράσταση στις τιμές x_j, $j = 1, 2, \ldots, \nu$ έχουν μέγεθος ίσο με την αντίστοιχη πιθανότητα p_j.

Η πιθανότητα π.χ. $P[x_2 \le X < x_4] = P[X = x_2] + P[X = x_3]$ σημειώνεται ενδεικτικά στη γραφική παράσταση ως $P[X < x_4] - P[X \le x_1]$ ή ισοδύναμα ως

$P[X \leq x_3] - P[X < x_2]$.

Παράδειγμα 12ο:

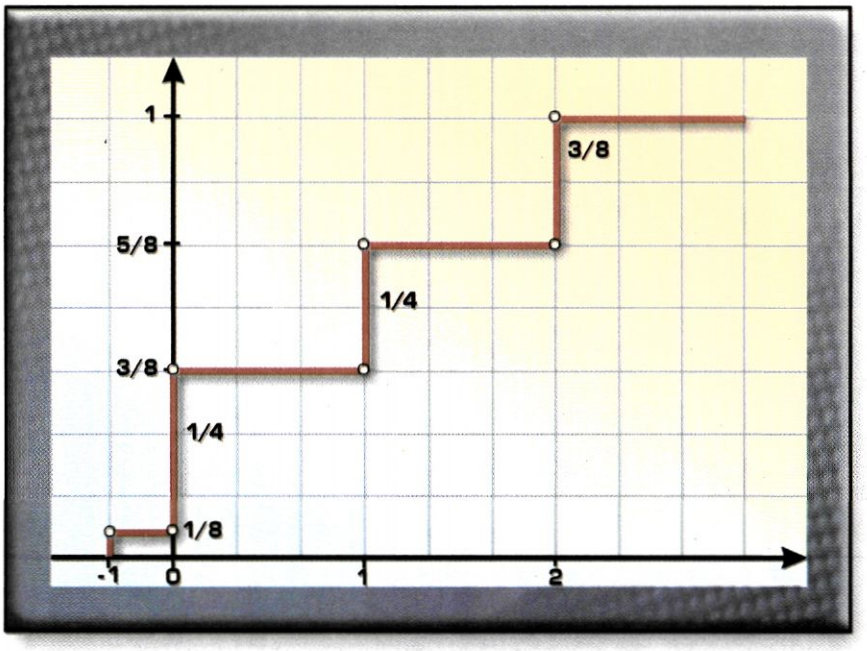
Αν η τ.μ. X έχει πίνακα κατανομής:

x_j	-1	0	1	2
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

Να δοθεί η αναλυτική έκφραση της σ.κ. $P[X \leq x_j]$, καθώς και η γραφική της παράσταση.

Να βρεθεί η $P[-1 \leq X < 2]$.

Απάντηση



Σχ. (3.6)

$$P[-1 \le X < 2] = P[X=-1] + P[X=0] + P[X=1] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

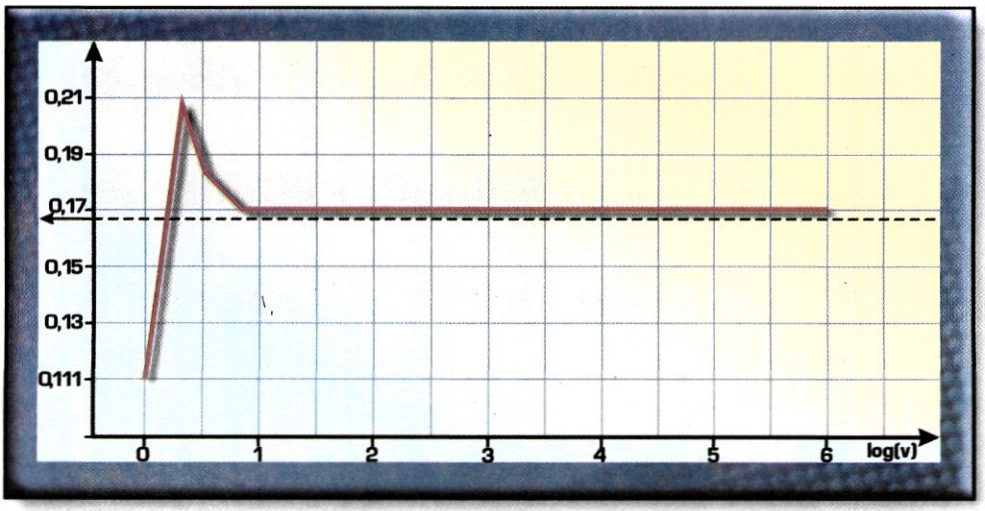
(☆) 3.7 Εκτίμηση Κατανομών Πιθανότητας

Οι πιθανότητες όπως έχουμε δει θεωρούνται ως οι οριακές τιμές των σχετικών συχνοτήτων. Ας πάρουμε και πάλι το ζάρι και ας προσπαθήσουμε πειραματικά να επιβεβαιώσουμε ότι η οριακή τιμή της σχετικής συχνότητας εμφάνισης π.χ. του 5 είναι $p_5 = \frac{1}{6}$.

Με τη βοήθεια ενός Η/Υ, προσομοιώνουμε* τη ρίψη ενός ζαριού και κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση της σχετικής συχνότητας $\frac{\nu_5}{\nu}$ (άξονας των y) και του αριθμού (ν) των ρίψεων (άξονας των x).

Αριθμός ρίψεων (ν)	Σχετική συχνότητα των ενδείξεων ($\frac{\nu_i}{\nu}$)					
	1	2	3	4	5	6
36	0,250 (9)	0,222 (8)	0,139 (5)	0,139 (5)	0,111 (4)	0,139 (5)
216	0,176 (38)	0,153 (33)	0,139 (30)	0,153 (33)	0,208 (45)	0,171 (37)
1296	0,149 (193)	0,174 (225)	0,145 (188)	0,164 (212)	0,183 (237)	0,184 (241)
7796	0,164 (1278)	0,164 (1278)	0,172 (1341)	0,168 (1310)	0,168 (1310)	0,164 (1279)
46656	0,168 (7838)	0,164 (7652)	0,167 (7792)	0,167 (7792)	0,166 (7744)	0,168 (7838)
Οριακή τιμή	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

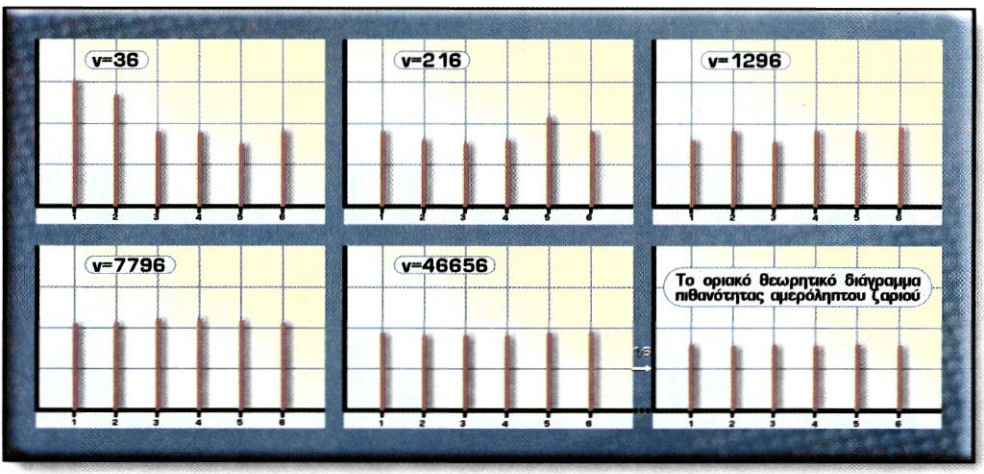
* Προσομοίωση : Η αναπαράσταση της συμπεριφοράς ή των χαρακτηριστικών μιας διαδικασίας (π.χ. προσομοίωση πτήσης αεροσκάφους κ.λ.π.)



Σχ. (3.7) Λογαριθμική Κλίμακα[**]

Γίνεται φανερό από το σχήμα ότι όσο ο αριθμός των ρίψεων αυξάνεται τόσο πλησιέστερα προς την οριακή τους τιμή συγκλίνουν οι σχετικές συχνότητες.

Λέμε τότε ότι η παρατηρηθείσα κατανομή των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος συγκλίνει προς τη θεωρητική κατανομή, όσο αυξάνεται ο αριθμός ν των επαναλήψεών του.



Σχ. (3.8) Σύγκλιση σχετικών συχνοτήτων προς την οριακή τους τιμή

[**] Σχεδιαστικοί λόγοι επιβάλλουν σε κάποιες περιπτώσεις αντί των τιμών να χρησιμοποιούμε τους λογαρίθμους τους.

3.8 Αναμενόμενη τιμή διακριτής τ.μ. X

Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων ο δειγματικός μέσος ορίζεται από την

$$\overline{X} = \frac{1}{\nu} \Sigma \nu_j x_j$$

όπου ν_j η συχνότητα με την οποία εμφανίζεται η τιμή x_j και $\nu = \Sigma \nu_j$, ο συνολικός αριθμός εμφανίσεων των τιμών της μεταβλητής X.

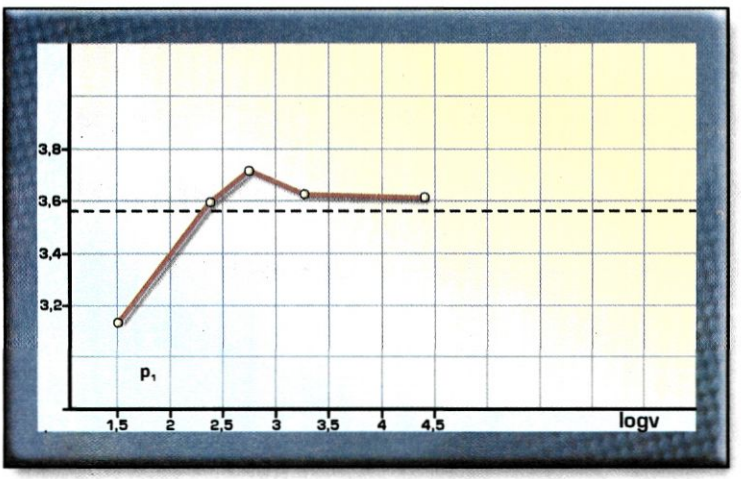
Ο τύπος του δειγματικού μέσου μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\overline{X} = \Sigma \left\{ x_j \left(\frac{\nu_j}{\nu} \right) \right\}, \quad \text{όπου } \frac{\nu_j}{\nu} \text{ η σχετική συχνότητα της } x_j$$

Όταν το ν αυξάνεται, τί συμβαίνει στον δειγματικό μέσο $\overline{X}$;

Για να καταλάβουμε τί συμβαίνει ας επανέλθουμε στο παράδειγμα του ζαριού και ας κάνουμε την γραφική παράσταση των τιμών του δειγματικού μέσου $\overline{X}$ (άξονας y) και του αριθμού των ρίψεων ν του ζαριού (άξονας x).

Αριθμός ρίψεων (ν)	Τιμές x_j							$\overline{X}_{(\nu)}^{(*)} = \frac{1}{\nu} \Sigma \nu_j x_j = \Sigma x_j \left[\frac{\nu_j}{\nu} \right]$	
		1	2	3	4	5	6		
ν=36	ν_j	9	8	5	5	4	5	$\bar{x}(36)$	= 3,055
ν =216	ν_j	38	33	30	33	45	37	$\bar{x}(216)$	= 3,578
ν=1296	ν_j	193	225	188	212	237	241	$\bar{x}(1296)$	= 3,616
ν=7796	ν_j	1278	1278	1341	1310	1310	1279	$\bar{x}(7796)$	= 3,504
ν =46656	ν_j	7838	7652	7792	7792	7744	7838	$\bar{x}(46656)$	= 3,502



→ E[X]

Σχ. (3.9) Λογαριθμική Κλίμακα

Διαπιστώνουμε ότι, όπως και στην περίπτωση της σχετικής συχνότητας, αυξανομένου του ν, οι τιμές του δειγματικού μέσου $\overline{X}$ προσεγγίζουν κάποια οριακή τιμή.

Την οριακή αυτή τιμή του δειγματικού μέσου $\overline{X}$ ονομάζουμε **αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X** και την συμβολίζουμε με E[X]. Όσο ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ προσεγγίζει την οριακή τιμή E[X], τόσο οι σχετικές συχνότητες $\frac{\nu_j}{\nu}$ προσεγγίζουν τις αντίστοιχες πιθανότητες p_j των τιμών x_j της τ.μ. X.

Μετά τη σημαντική αυτή παρατήρηση μπορούμε να πούμε ότι για να βρούμε την οριακή τιμή E[X] αρκεί να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$E[X] = \sum x_j p_j$$

Συνοψίζοντας έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ τιμές της διακριτής τ.μ. X με αντίστοιχες πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_\nu, \ldots$ ορίζουμε ως ***αναμενόμενη τιμή της*** **X** και την συμβολίζουμε με E[X] το άθροισμα: $E[X] = \boxed{\sum x_j p_j}$

Παράδειγμα 13ο:

Η τ.μ. Χ παίρνει τις τιμές 2 και 5. Αν η πιθανότητα $P[X=2]=p_2 = p$ και η $P[X=5]=p_5=2p$, ποια είναι η αναμενόμενη τιμή της Χ ;

Απάντηση

Αφού ο δειγματικός χώρος R_X της Χ είναι το {2, 5} με $p_2= p$ και $p_5=2p$, πρέπει: $p+2p= 1$, άρα $p_2= 1/3$ και $p_5= 2/3$

Από τον ορισμό της αναμενόμενης τιμής έχουμε:

$$E[X] = (2 \cdot p_2) + (5 \cdot p_5) = (2 \cdot p) + (5 \cdot 2p) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Σημείωση: Η αναμενόμενη τιμή μιας διακριτής τ.μ. Χ δεν είναι αναγκαστικά ακέραιος αριθμός, ούτε είναι απαραίτητα κάποια από τις δυνατές τιμές της μεταβλητής.

Παράδειγμα 14ο:

Να βρεθεί η Ε[Χ] της τ.μ. Χ που συμβολίζει τις δυνατές ενδείξεις ενός αμερόληπτου ζαριού.

Απάντηση

Ο πίνακας της κατανομής πιθανότητας της τ.μ. Χ είναι ο ακόλουθος.

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Η πιθανότητα για κάθε απλό ενδεχόμενο είναι $p = \frac{1}{6}$ γιατί το ζάρι είναι αμερόληπτο.

Από τον ορισμό της Ε[Χ] έχουμε:

$$E[X] = \sum x_j p_j = (1 \cdot \frac{1}{6}) + (2 \cdot \frac{1}{6}) + (3 \cdot \frac{1}{6}) + (4 \cdot \frac{1}{6}) + (5 \cdot \frac{1}{6}) + (6 \cdot \frac{1}{6}) = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

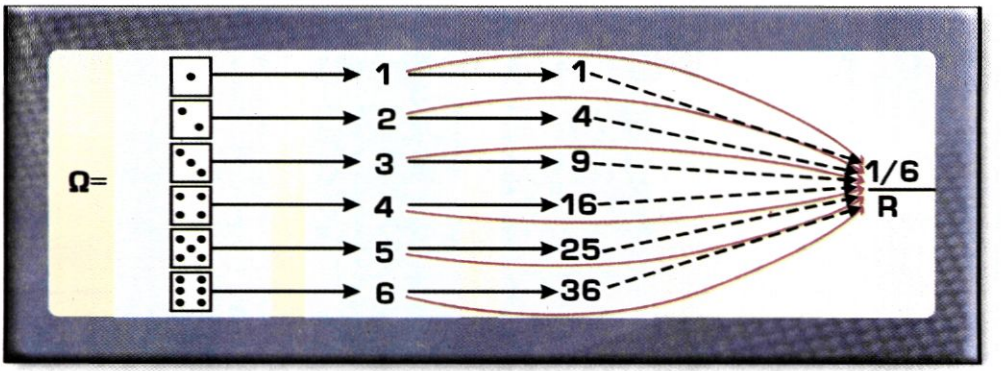
τιμή που ούτε ακέραια είναι, ούτε στο δειγματικό χώρο R_X της τ.μ. Χ ανήκει.

Σημείωση: Η Ε[Χ] μιας τυχαίας μεταβλητής Χ ονομάζεται μέσος του πληθυσμού των τιμών της Χ και συμβολίζεται με μ. Έτσι στα επόμενα όταν γράφουμε μ θα εννοούμε την αναμενόμενη τιμή μιας τ.μ. Χ.

3.8.1 Αναμενόμενη τιμή της X^2

Κατ' ανάλογο τρόπο ορίζεται η $E[X^2]$ του τετράγωνου μιας τ.μ. Χ, αρκεί να σκεφτούμε ως εξής :

Αν η τ.μ. Χ παίρνει τιμές $x_1, x_2, .., x_\kappa, \ldots$ με πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_\kappa, \ldots$ αντιστοίχως, τότε η τ.μ. X^2 θα παίρνει τιμές $x_1^2, x_2^2, \ldots x_\kappa^2, \ldots$ με πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_\kappa, \ldots$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και από το παράδειγμα του ζαριού.



Σχ. (3.10)

Σκεφτείτε : Η πιθανότητα της Χ να πάρει π.χ. την τιμή 2 είναι $p_2 = \frac{1}{6}$ και η πιθανότητα της X^2 να πάρει την τιμή $2^2 = 4$ είναι και πάλι $\frac{1}{6}$, αφού το $X^2 = 4$ όταν το $X=2$.

Η τιμή της $E[X^2]$ υπολογίζεται από την : $E[X^2] = \sum x_j^2 p_j$

Παράδειγμα 15°:

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα, να βρεθεί η $E[X^2]$.

Απάντηση

Σύμφωνα με τον πίνακα κατανομής της πιθανότητας της τ.μ. Χ έχουμε:

x_j	1	2	3	4	5	6
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

και για τον πίνακα κατανομής πιθανότητας της τ.μ. X^2 θα έχουμε:

x_j^2	1	4	9	16	25	36
p_j	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Άρα : $$E[X^2] = 1\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 9\cdot\frac{1}{6} + 16\cdot\frac{1}{6} + 25\cdot\frac{1}{6} + 36\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6} = 15{,}167$$

Παρατηρούμε ότι η $E[X^2] = 15{,}167$ που διαφέρει από το τετράγωνο της $E[X] = 3{,}5$ ($3{,}5^2 \cong 12$), τιμή που βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Σημείωση: Γενικά ισχύει ότι : $E[X^2] \neq \{E[X]\}^2$

3.9 Η διακύμανση διακριτής τ.μ. X

Στη συζήτηση που προηγήθηκε είδαμε ότι όσο αυξάνεται το ν, τόσο οι σχετικές συχνότητες $\frac{\nu_j}{\nu}$ "συμπεριφέρονται" σαν πιθανότητες ενώ ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ πλησιάζει όλο και περισσότερο προς το μέσο του πληθυσμού E[X].

Τέλος παρατηρούμε ότι αυξανομένου του ν, η δειγματική διακύμανση S^2 προσεγγίζει τη διακύμανση της τ.μ. X που συμβολίζουμε με Var(X) και την ορίζουμε με τη βοήθεια των αναμενόμενων τιμών E[X] και $E[X^2]$ ως

$$\mathbf{Var(X) = E[X^2] - \{E[X]\}^2}$$

Η διακύμανση Var(X) μιας τ.μ.X είναι **πάντα** μη αρνητική.

Δηλαδή για κάθε τ.μ. X ισχύει ότι: $E[X^2] \geq \{E[X]\}^2$

Συνοψίζοντας παίρνουμε τον πίνακα:

Δείγμα		Πληθυσμός τιμών της X
Σχετική Συχνότητα, $\frac{v_j}{v}$	Τείνει προς →	Πιθανότητα, $P[X=x_j] = p_j$
Δειγματικός μέσος, $\overline{X}$	Τείνει προς →	$E[X] = \Sigma x_j p_j$
Δειγματική Διακύμανση, S^2	Τείνει προς →	$Var(X) = E[X^2] - \{E[X]\}^2$

Παράδειγμα 16ο:

Η τ.μ. X παίρνει τις τιμές 2 και 5 με πιθανότητες 1/3 και 2/3 αντιστοίχως. Να υπολογιστεί η Var(X).

Απάντηση

Ο πίνακας κατανομής πιθανότητας είναι:

x_j	2	5
p_j	1/3	2/3

Υπολογίζουμε αρχικά την $E[X] = 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} = 4$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε την $E[X^2] = 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 5^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{54}{3} = 18$

Άρα : $V(X) = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = 18 - 4^2 = 2$

Παράδειγμα 17ο:

Η τ.μ. X παίρνει τις τιμές 0 και 1 με πιθανότητα p_o=1-p και p_1=p. Να βρεθεί η E[X] και η Var(X).

Απάντηση

Η E[X] με βάση τον ορισμό είναι:

$E[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

Για τη διακύμανση υπολογίζουμε πρώτα την

$$E[X^2] = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$$

και αντικαθιστώντας στην

$$Var(X) = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

βρίσκουμε ότι η Var(X) της συγκεκριμένης τ.μ. X ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων p και (1-p).

3.9.1 Η τυπική απόκλιση τ.μ. X

Η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{Var(X)}$ της διακύμανσης μιας τ.μ. X ορίζεται ως η *τυπική της απόκλιση.*

Σύμφωνα με τον ορισμό η τυπική απόκλιση της τ.μ. του παρ. 16 είναι $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{2}$, ενώ η τυπική απόκλιση της τ.μ. του παρ. 17 είναι $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{p(1-p)}$.

Το παράδειγμα που ακολουθεί συνοψίζει τα κυριότερα σημεία των προηγούμενων παραγράφων.

Παράδειγμα 18ο:

Η τ.μ. X παίρνει τις τιμές 1, 2, 3 με πιθανότητες που δίνονται από τη συνάρτηση πιθανότητας.

$$P[X = x_j] = \begin{cases} \lambda x_j^3 & , \text{για } x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3 \\ 0 & , \text{για όλα τα άλλα } x \end{cases}$$

Να βρεθούν με ακρίβεια 3 δεκαδικών οι τιμές:

α) Της σταθεράς λ

β) Της E[X]

γ) Της Var(X)

Απάντηση

Για ευκολία, κατασκευάζουμε τον πίνακα κατανομής πιθανότητας, υπολογίζοντας πρώτα τις πιθανότητες p_1, p_2 και p_3 των τιμών της τ.μ. X

$$P[X = 1] = p_1 = \lambda(1)^3 = \lambda$$
$$P[X = 2] = p_2 = \lambda(2)^3 = 8\lambda$$
$$P[X = 3] = p_3 = \lambda(3)^3 = 27\lambda$$

α) Κατά τα γνωστά, πρέπει $p_j \geq 0$ και $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, άρα:

$$\lambda + 8\lambda + 27\lambda = 1 \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{1}{36}$$

οπότε ο πίνακας κατανομής της πιθανότητας γίνεται:

x_j	1	2	2
p_j	1/39	8/36	27/36

β) Η $E[X] = \sum x_j p_j = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{8}{36} + 3 \cdot \frac{27}{36} = \frac{98}{36} = 2{,}722$

γ) Για τον υπολογισμό της $\sqrt{\text{Var}(X)}$ απαιτείται ο υπολογισμός της $\text{Var}(X) = E[X^2] - \{E[X]\}^2$ για τον οποίο αρκεί να βρούμε την $E[X^2]$, που δίνεται από την:

$$E[X^2] = \sum x_j^2 p_j = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{8}{36} + 3^2 \cdot \frac{27}{36} = \frac{276}{36}$$

Άρα : $\text{Var}(X) = \frac{276}{36} - \left(\frac{98}{36}\right)^2 = 0{,}2562$

και $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{0{,}2562} = 0{,}506$

Σημείωση: Η E[X] και η Var(X) συμβολίζονται με μ και σ^2 αντιστοίχως.
Έτσι : $E[X] = \mu$, $\text{Var}(X) = \sigma^2$ και $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sigma$

3.10 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Η έως τώρα αναφορά μας σε τυχαίες μεταβλητές έχει περιοριστεί σε διακριτές τυχαίες μεταβλητές, σε μεταβλητές δηλαδή που οι τιμές τους αποτελούν μεμονωμένα σημεία αριθμητικών συνόλων.

Οι μεταβλητές που θα μας απασχολήσουν στην παράγραφο αυτή παίρνουν τιμές σε διάστημα (α, β) του συνόλου των πραγματικών αριθμών και μάλιστα κατά τρόπο ώστε κάθε τιμή του διαστήματος να είναι δυνατή τιμή για τη μεταβλητή.

Κάθε τέτοια μεταβλητή ονομάζεται συνεχής

Συνηθισμένα παραδείγματα συνεχών μεταβλητών αποτελούν η ηλικία, το ύψος και το βάρος των ατόμων, η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου, ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών σεισμικών δονήσεων μεγέθους μεγαλύτερου των 6 Richter, ο χρόνος που απαιτείται για την κάλυψη της απόστασης Αθηνών, Λονδίνου από συγκεκριμένο τύπο αεροσκάφους κ.λ.π.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το πλήθος των δυνατών τιμών των συνεχών τυχαίων μεταβλητών είναι απεριόριστο, με συνέπεια να σκεφτόμαστε ότι η αντιστοίχιση πιθανότητας σε κάθε μια από αυτές τις τιμές είναι μια μάλλον μάταια προσπάθεια. Η πιθανότητα εμφάνισης μιας από τις απεριορίστου πλήθους δυνατές τιμές μιας συνεχούς τ.μ. είναι θεωρητικά μηδέν.

Η αδυναμία που μόλις εντοπίσαμε μπορεί να αντιμετωπιστεί αντιστοιχίζοντας πιθανότητα όχι σε συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής, αλλά σε κάποιο διάστημα τιμών που την περιέχει.

Παράδειγμα 19ο:

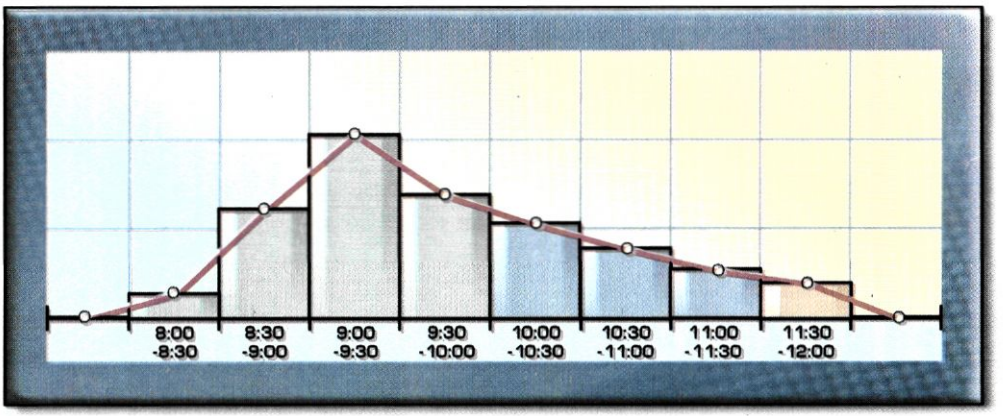
Αν Τ συνεχής τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τον χρόνο που απαιτείται από συγκεκριμένο τύπο αεροσκάφους να καλύψει την απόσταση Αθηνών – Νέας Υόρκης, η τ.μ. Τ παίρνει τιμές στο διάστημα (8, 12) ωρών. Η άφιξη του αεροσκάφους στον προορισμό του είναι δυνατή μετά από πτήση χρονικής διάρκειας μεταξύ των άκρων αυτού του διαστήματος.

Ας μείνουμε στο παράδειγμα αυτό και ας υποθέσουμε ότι σε ν = 1000 δρομολόγια του Εθνικού μας αερομεταφορέα μεταξύ Αθηνών και Νέας Υόρκης, οι χρόνοι που σημειώθηκαν μετά την οργάνωση τους σε κατανομή συχνοτήτων οκτώ κλάσεων πλάτους 30 λεπτών είναι οι ακόλουθοι:

Κλάσεις	v_i	f_i	N_i
8:00 8:30	30	0,03	30
8:30 9:00	160	0,16	190
9:00 9:30	270	0,27	460
9:30 10:00	180	0,18	640
10:00 10:30	140	0,14	780
10:30 11:00	100	0,10	880
11:00 11:30	70	0,07	950
11:30 12:00	50	0,05	1000
Σύνολο	1000	1	

Με τη βοήθεια του ιστογράμματος (I_1) της κατανομής συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα παίρνουμε μια πρώτη εικόνα της κατανομής των χρόνων πτήσης.

Από το ιστόγραμμα μπορούμε π.χ. να εκτιμήσουμε ότι το 64% των χρόνων αυτής είναι μικρότεροι των 10 ωρών (πράσινο τμήμα του ιστογράμματος) ή ότι μόλις το 5% των χρόνων είναι μεγαλύτεροι των 11 ωρών και 30 λεπτών (πορτοκαλί τμήμα του ιστογράμματος).



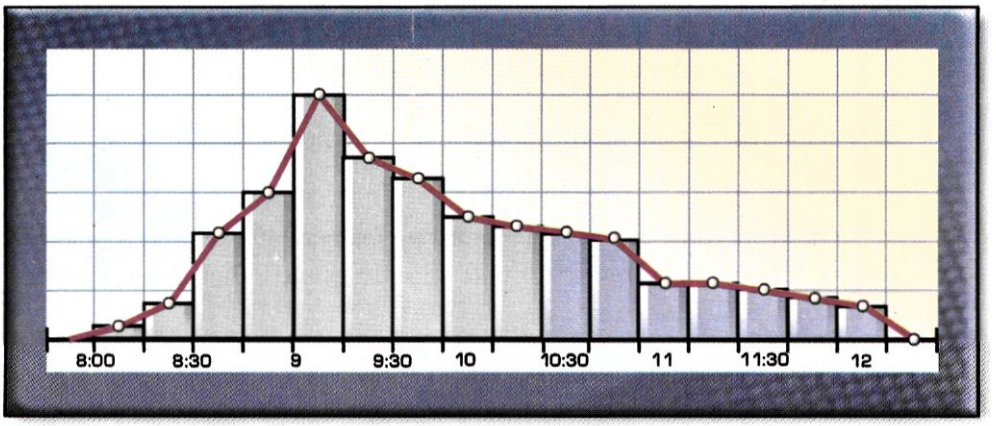
Πώς όμως θα μπορούσαμε να απαντήσουμε στην ερώτηση :

«Ποιο ποσοστό χρόνων πτήσης είχε διάρκεια μικρότερη των 10 ωρών και 15 λεπτών;»

Απάντηση στο ερώτημα μπορεί να δοθεί αν αυξήσουμε τον αριθμό των κλάσεων της κατανομής συχνοτήτων στο διπλάσιο και ελαττώσουμε το πλάτος τους στο μισό.

Η ενέργεια αυτή έχει ως αποτέλεσμα την κατανομή συχνοτήτων του επόμενου πίνακα και το ιστόγραμμα (I_2), από το οποίο προκύπτει ότι το ποσοστό των χρόνων διάρκειας μικρότερης των 10 ωρών και 15 λεπτών είναι 71,2% (πράσινο τμήμα του ιστογράμματος I_2).

Κλάσεις	v_i	f_i	N_i
8:00 8:15	8	0,008	8
8:15 8:30	22	0,022	30
8:30 8:45	67	0,067	97
8:45 9:00	93	0,093	190
9:00 9:15	154	0,154	344
9:15 9:30	116	0,116	460
9:30 9:45	103	0,103	563
9:45 10:00	77	0,077	640
10:00 10:15	72	0,072	712
10:15 10:30	68	0,068	780
10:30 10:45	64	0,064	844
10:45 11:00	36	0,036	880
11:00 11:15	37	0,037	917
11:15 11:30	33	0,033	950
11:30 11:45	28	0,028	978
11:45 12:00	22	0,022	1000
Σύνολο	1000	1	



(Ι$_2$) Ιστόγραμμα της κατανομής συχνοτήτων Σχ. (3.12)

Γενικώς, μπορούμε, όπως θα δούμε, να απαντήσουμε στην ερώτηση:

Με ποια πιθανότητα η αυριανή πτήση για Νέα Υόρκη θα διαρκέσει μεταξύ α και β ωρών, όπου α, β σημεία του διαστήματος (8, 12).

Η πιθανότητα έχει και εδώ φυσικά την έννοια της οριακής σχετικής συχνότητας, όπως αυτή ορίζεται σε ένα πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

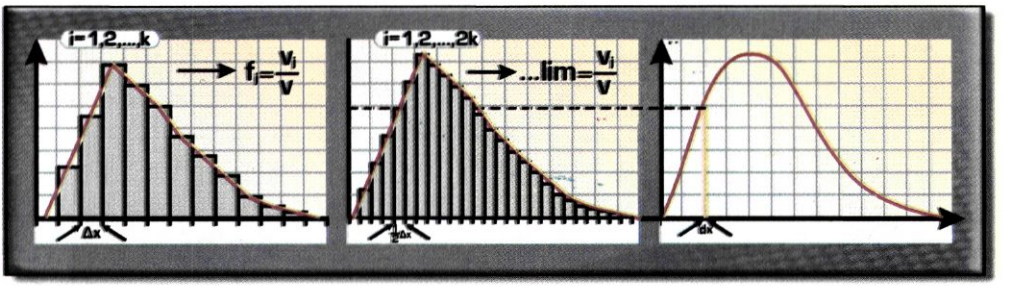
Αν αυξήσουμε τις απαιτήσεις μας και θελήσουμε να υπολογίσουμε το ποσοστό των χρόνων με τιμή μικρότερη, π.χ. των 9 ωρών και 5 λεπτών, είναι φανερό ότι πρέπει να τριπλασιαστεί ο αριθμός των κλάσεων της κατανομής συχνοτήτων και να υποτριπλασιαστεί το πλάτος τους.

Η διαδικασία αυτή, της αύξησης δηλαδή του αριθμού των κλάσεων με ταυτόχρονη μείωση του εύρους κάθε κλάσης, έχει νόημα όταν το πλήθος (ν) των παρατηρήσεων είναι μεγάλο. Σε αντίθετη περίπτωση υπάρχει το ενδεχόμενο κλάσεων με μηδενικές συχνότητες.

3.11 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τ.μ.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η αύξηση του αριθμού των ιστών ενός ιστογράμματος κατανομής συχνοτήτων που ακολουθείται από την ταυτόχρονη μείωση του πλάτους των κλάσεων διευκολύνει την προσέγγιση της μορφής που έχει η κατανομή.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε το πολύγωνο συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή ομαλής καμπύλης, που είναι γνωστή ως "καμπύλη συχνοτήτων". (Σχ. 3.13)



Σχ. (3.13)

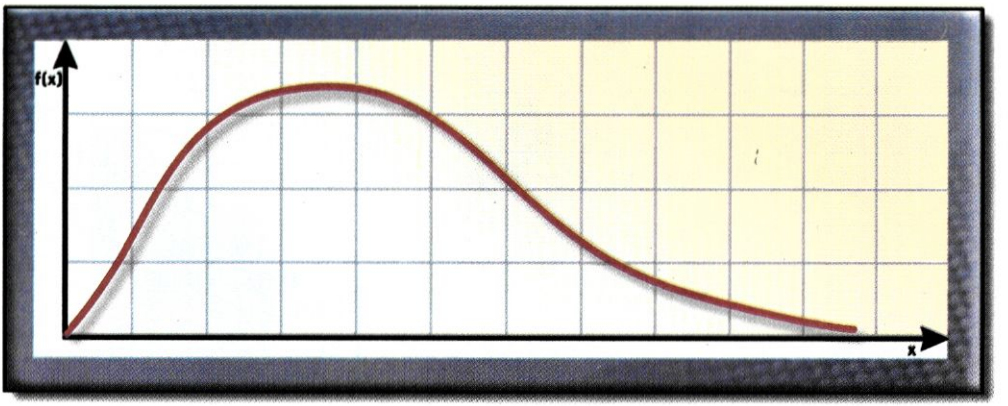
Τα εμβαδά κάθε ιστού του ιστόγραμμου παριστάνουν σχετικές συχνότητες. Γνωρίζουμε όμως ότι οι σχετικές συχνότητες $f_j = \frac{\nu_j}{\nu}$ τείνουν προς πιθανότητες, όταν το ν τείνει στο άπειρο και ότι $\sum f_j = \sum \frac{\nu_j}{\nu} = 1$.

Άρα το εμβαδόν που περιέχεται μεταξύ μιας καμπύλης συχνοτήτων και των ευθειών x=α και x=β όπου α και β τα άκρα του διαστήματος των τιμών της τ.μ είναι ίσο με 1.

Το εμβαδόν το περικλειόμενο μεταξύ της καμπύλης συχνοτήτων, των ευθειών x=α και x=β, όπου α,β τα άκρα του διαστήματος και του άξονα των τιμών της μεταβλητής είναι μοναδιαίο.

Η τελευταία παρατήρηση περί μοναδιαίου εμβαδού συμφωνεί με την συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί κάθε συνάρτηση πιθανότητας, σύμφωνα με την οποία το άθροισμα των πιθανοτήτων όλων των δυνατών τιμών μιας τ.μ. Χ ισούται με τη μονάδα.

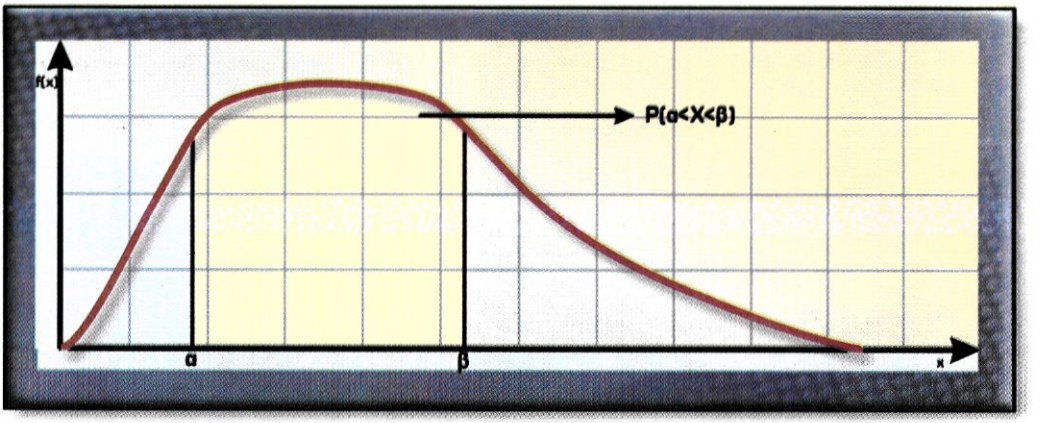
Συνεχείς καμπύλες, όπως αυτή του σχήματος (3.13), που ικανοποιούν τη συνθήκη του μοναδιαίου εμβαδού αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f(x)≥0 που ορίζονται ως **συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) μιας συνεχούς τ.μ. Χ**



Σχ. (3.14) Τυπική μορφή καμπύλης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας

Για κάθε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) ισχύει:

Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την καμπύλη και δύο τιμές α και β της τυχαίας μεταβλητής X, η οποία έχει τη συγκεκριμένη σ.π.π., ισούται με την πιθανότητα $P(\alpha < X < \beta)$.



Σχ. (3.15) Το εμβαδό του κίτρινου τμήματος δίνει την πιθανότητα $P(\alpha<X<\beta)$

3.12 Ιδιότητες της σ.π.π

Δεν θα ήταν υπερβολή να πούμε ότι ξέρουμε ήδη τις ιδιότητες της σ.π.π . Πράγματι:

1. Επειδή δεν είναι δυνατόν να έχουμε αρνητικές πιθανότητες, η καμπύλη της f(x) βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα των y, άρα :

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{για όλα τα } x$$

2. Η $P(\alpha < X < \beta)$ ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

3. Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων είναι εξ'ορισμού ίσο με 1. Το ίδιο ισχύει και για τις πιθανότητες.

Το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα των x είναι κατά συνέπεια ίσο με 1.

Παράδειγμα 20°:

Η συνεχής τ.μ. X έχει σ.π.π. που δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{για } 0<x<2 \\ 0 & \text{για κάθε άλλο } x \end{cases}$$

Ποια είναι η P(X>1) ;

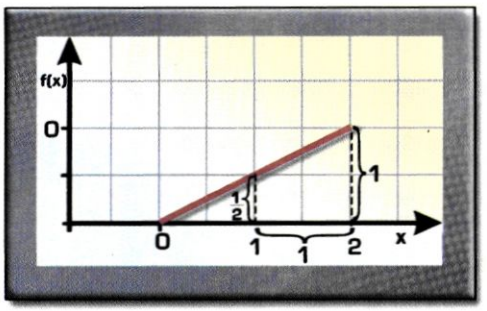
Απάντηση

Πριν τον υπολογισμό της πιθανότητας, πρέπει να δείξουμε ότι η f(x) είναι πράγματι σ.π.π. της συνεχούς τ.μ. X.

Πρέπει :

1. $f(x) \geq 0$, για όλα τα x, δηλαδή $f(x) = \frac{1}{2}x \geq 0$ για όλα τα $x \in (0, 2)$, απαίτηση που ικανοποιείται.
2. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της f(x) και μεταξύ των x=0 και x=2 είναι $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ (Σχ. 3.16).

Άρα η f(x) είναι σ.π.π.



Σχ. (3.16)

Η γραφική παράσταση της f(x) δίνεται από το σχήμα και η ζητούμενη πιθανότητα από το εμβαδόν, του τραπεζίου το οποίο ισούται με

$$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\cdot 1 = 0{,}75$$

Παράδειγμα 21°:

Η συνεχής τ.μ. έχει σ.π.π. που δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{για } 2<x<5 \\ 0 & \text{για κάθε άλλο } x \end{cases}$$

Να βρεθεί:

α) Η $P(2 < X < 3)$

β) Η $P(X > 4)$

γ) Η $P(2{,}5 < X < 3{,}5)$

δ) Η $P(2{,}5 < X < 4)$

Απάντηση

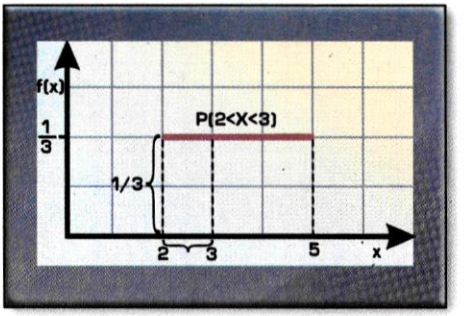
Η f(x) είναι σ.π.π.

Πράγματι :

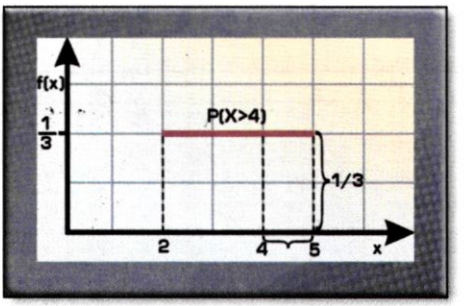
1. $f(x) \geq 0$, για όλα τα x
2. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και μεταξύ των ευθειών x=2 και x=5 είναι $(5-2)\cdot\frac{1}{3} = 1$

Άρα η f(x) είναι σ.π.π. και συνεπώς ο υπολογισμός των ζητούμενων πιθανοτήτων είναι δυνατός.

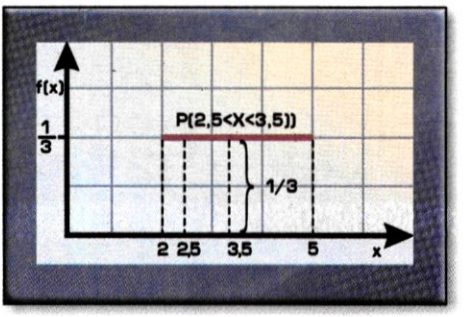
α) Η $P(2<X<3) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$



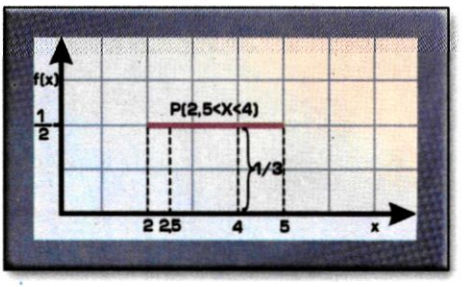
β) Η $P(X>4) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$



γ) Η $P(2,5<X<3,5) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$



δ) Η $P(2,5<X<4) = \frac{1}{3} \cdot 1,5 = \frac{1}{2}$



Σχ. (3.17)

Παράδειγμα 22ο:

Η συνεχής τ.μ. Χ έχει σ.π.π. που δίνεται από την

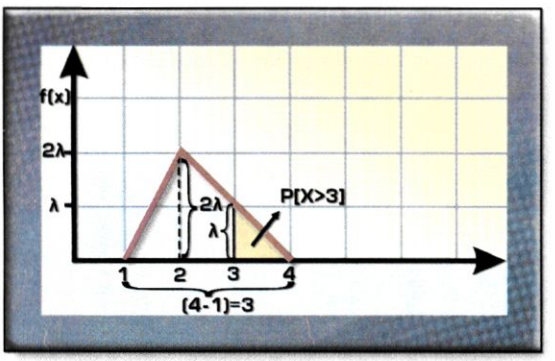
$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda(x-1) & \text{για } 1<x<2 \\ \lambda(4-x) & \text{για } 2<x<4 \\ 0 & \text{για όλα τα άλλα } x \end{cases}$$

Ποια είναι η τιμή της λ και ποια είναι η πιθανότητα P(X>3) ;

Απάντηση

Η τιμή της λ βρίσκεται από τη συνθήκη του μοναδιαίου εμβαδού που πρέπει να ικανοποιεί κάθε σ.π.π. f(x).

Η γραφική παράσταση της f(x) είναι το τρίγωνο του σχήματος με εμβαδό



Σχ. (3.18)

$$E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\lambda = 3\lambda \text{ άρα } 3\lambda = 1,$$

$$\text{και } \lambda = \frac{1}{3}$$

Για $\lambda = \frac{1}{3}$ η μορφή της f(x) είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x-1) & \text{για } 1<x<2 \\ \frac{1}{3}(4-x) & \text{για } 2\leq x<4 \\ 0 & \text{για όλα τα άλλα } x \end{cases}$$

Η P(X > 3) είναι το εμβαδόν του κίτρινου τμήματος που ισούται με

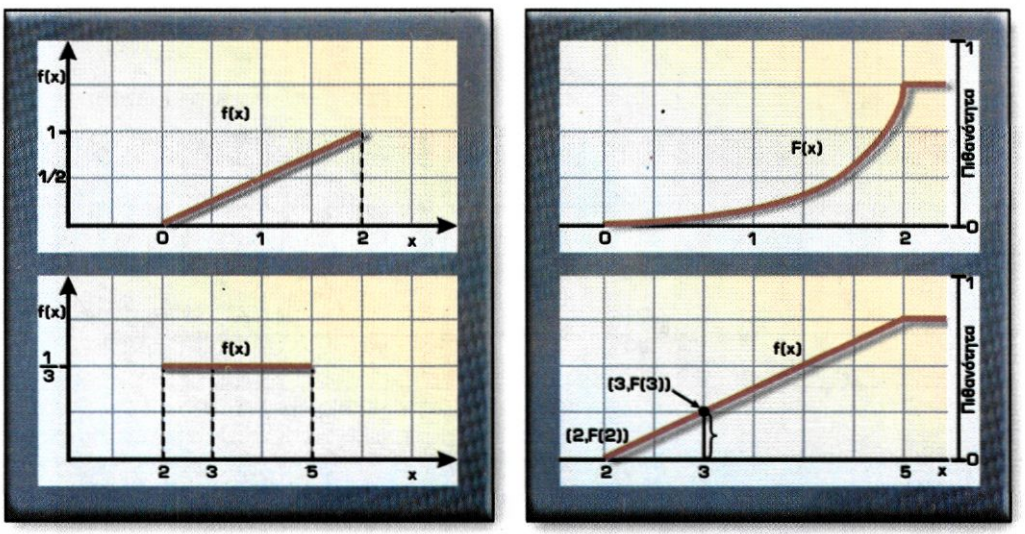
$$\frac{1}{2}\cdot(4-3)\cdot\lambda=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

3.13 Η συνάρτηση κατανομής συνεχούς τ.μ.

Έστω η συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. f(x).

Ονομάζουμε συνάρτηση κατανομής της X και τη συμβολίζουμε με F(x), την P[X≤x] ή ισοδύναμα την P[X<x].
Έτσι: F(x) = P[X ≤ x] = P[X < x]

Στα σχήματα δίνονται οι μορφές της F(x) για τις σ.π.π. των παραδειγμάτων (3.19) και (3.20) αντιστοίχως.



Σχ. (3.19)

Ας θυμηθούμε το πρώτο ερώτημα του παραδείγματος 21 στο οποίο βρήκαμε την P(2<X<3) ως το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου με βάση (3-2) και ύψος $\frac{1}{3}$.

Με την βοήθεια του ορισμού της συνάρτησης κατανομής F(x) θα υπολογίσουμε την P(2<X<3);

Αν προσέξουμε το σχήμα της F(x) θα διαπιστώσουμε ότι το 3 του άξονα των x είναι η προβολή του σημείου με συντεταγμένες (3, F(3)), όπου F(3) = P[X<3] σύμφωνα με τον ορισμό. Ακόμη από το σχήμα έχουμε ότι το 2 του άξονα των x είναι η προβολή του σημείου (2,F(2)) και άρα F(2) = P[X<2] = 0. Από το τελευταίο συμπέρασμα προκύπτει ότι η P[X>2] = 1 και συνεπώς όλη η πιθανότητα κατανέμεται σε τιμές του X>2.

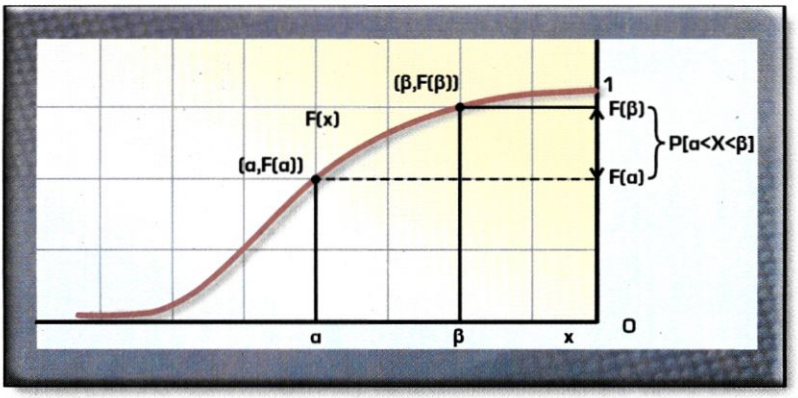
Ποια είναι λοιπόν η πιθανότητα P[2<X<3] με βάση τον ορισμό της F(x) = P[X ≤ x] ;

Είναι η διαφορά των τιμών της F(x), F(3) – F(2) στα άκρα του διαστήματος (2, 3), δηλαδή: $P[2 < X < 3] = F(3) - F(2) = P[X < 3] - P[X < 2] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

τιμή που συμπίπτει με αυτήν που βρήκαμε στο παράδειγμα 19.

Γενικώς:

Αν η F(x) = P[X ≤ x] = P[X < x] η συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς τ.μ. X η P[α≤x≤β] = P[α≤x<β] = P[α<x≤β] = P[α<x<β] = F(β) – F(α)



Σχ. (3.20) Συνάρτηση κατανομής συνεχούς τ.μ. και τρόπος υπολογισμού της P[α<x<β]=F(β)–F(α)

(☆) 3.14 Η ομοιόμορφη κατανομή

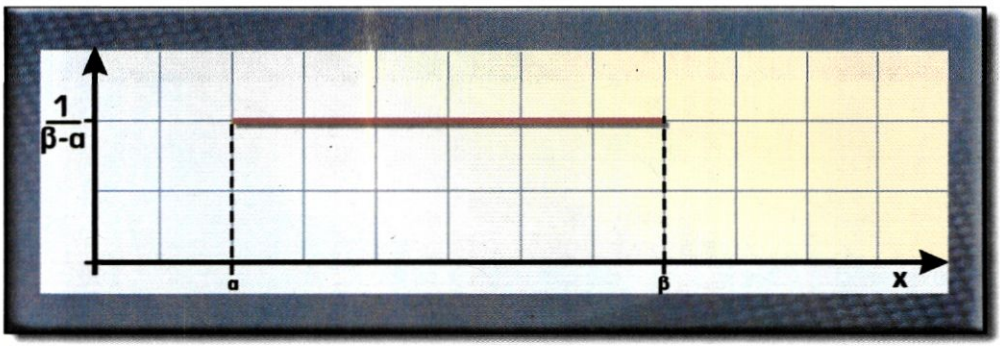
Αν η συνεχής τ.μ. X έχει σ.π.π. που δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{για } \alpha<x<\beta \\ 0 & \text{για όλα τα άλλα x} \end{cases}$$

τότε η X κατανέμεται **ομοιόμορφα** στο διάστημα (α, β) ή ότι έχει **ομοιόμορφη κατανομή.**

Η σταθερή τιμή της f(x) στο διάστημα (α, β) παράγει το ορθογώνιο του σχήματος, λόγος για τον οποίο η κατανομή συναντάται στην βιβλιογραφία και ως **«ορθογώνια».**

Το ύψος του ορθογωνίου είναι $\frac{1}{\beta-\alpha}$ και η βάση του β – α, άρα το εμβαδόν $E=(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}=1$, όπως απαιτείται από κάθε σ.π.π. f(x).



Σχ. (3.21)

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση κατανομής μιας ομοιόμορφα κατανεμόμενης συνεχούς τ.μ. X είναι :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{για } x\le\alpha\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{για } \alpha<x<\beta\\ 1 & \text{για } x\ge\beta\end{cases}$$

Αν επανέλθουμε στο παράδειγμα (3.20), τότε για α = 2 και β = 5 έχουμε :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{για } x\le 2\\ \dfrac{x-2}{3} & \text{για } 2<x<5\\ 1 & \text{για } x\ge 5\end{cases}$$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ Τ.Μ.

$R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ δειγματικός χώρος διακριτής τ.μ. X

$P[X = x_j] = p_j$, $j = 1, 2, .., k, \ldots$ συνάρτηση πιθανότητας

- $P[X = x_j] = p_j \geq 0$ για $j = 1, 2, \ldots k, \ldots$
- $\Sigma p_j = 1$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

x_1	x_2	...	x_k	...
p_1	p_2	...	p_k	...

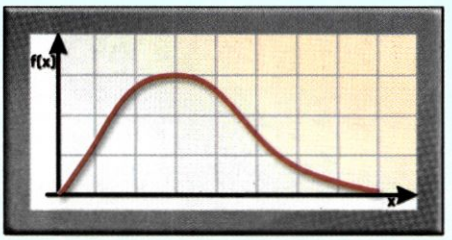
$P[X \leq x_j] = \Sigma p_j$, $j = 1, 2, .., k, \ldots$ συνάρτηση κατανομής

$\mu = E[X] = \sum x_j p_j$ αναμενόμενη τιμή της τ.μ X

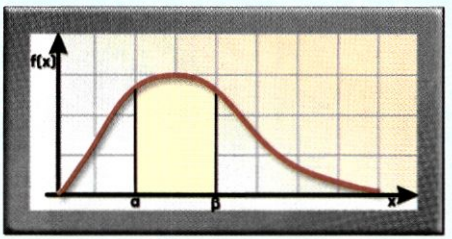
$E[X^2] \neq \{E[X]\}^2$

$\sigma^2 = Var[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2$ διακύμανση της τ.μ. X

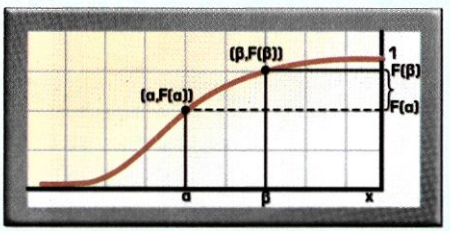
ΣΥΝΕΧΕΙΣ Τ.Μ.



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας συνεχούς τ.μ.



Η $P(\alpha<X<\beta)$



Σχ. (3.22)

$\Rightarrow P(\alpha<X<\beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
όπου $F(x) = P[X \leq x]$
η συνάρτηση κατανομής
της συνεχούς τ.μ. X

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{για } \alpha<x<\beta \\ 1 & \text{για όλα τα άλλα } x \end{cases}$$

Ομοιόμορφη σ.π.π.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ για } x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{για } \alpha<x<\beta \\ 1 & \text{για } x \ge \beta \end{cases}$$

Συνάρτηση κατανομής της ομοιόμορφης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ Α

1. Η τ.μ Χ έχει πίνακα κατανομής πιθανότητας:

x	1	2	3
P[X=x]	1/2	1/3	1/6

Συμπληρώστε τον πίνακα:

x	1	2	3
P[X<x]			

και κάνετε την γραφική παράσταση P[X=x] καθώς και της P[X≤x].

2. Ρίχνουμε νόμισμα 3 φορές. Αν η τ.μ Χ συμβολίζει το πλήθος των κεφαλών (Κ) δώστε τον πίνακα κατανομής πιθανότητας και την γραφική παράσταση της P[X=x].
Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός κεφαλών (Κ) στο πείραμα αυτό;

3. Η συνάρτηση κατανομής P[X≤x] διακριτής τ.μ Χ δίνεται στον πίνακα:

x	1	2	3	4
P[X≤x]	1/8	3/8	3/4	1

α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας της κατανομής πιθανότητας:

x	1	2	3	4
P[X=x]				

β) Να βρεθεί η E[X].

4. Η τ.μ Z συμβολίζει το πλήθος των αποτελεσμάτων Κ(κεφαλή) μείον το πλήθος των αποτελεσμάτων Γ(γράμματα) σε ν=2 ρίψεις ενός νομίσματος.
Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής της τ.μ Z και να βρεθεί η E[Z].

5. Στον πίνακα δίνεται η συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τ.μ X

x	0	0	4	3	4
P[X<x]	1/16	1/8	1/4	1/2	1

α) Να βρεθεί η $P[X=x]$ καθώς και η $E[X]$.
β) Να γίνει η γραφική παράσταση της $P[X\leq x]$ για $x= 0,1,2,3,4$
γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες : $P[X\leq 1]$, $P[1\leq X\leq 3]$ και $P[X\geq 2]$

6. Η τ.μ X μπορεί να πάρει δύο μόνο τιμές, τις x=2 και x=5. Αν η πιθανότητα της τιμής x=5 είναι διπλάσια της πιθανότητας της τιμής x=2, να βρεθεί η E[X].

7. Σε διαγώνισμα πολλαπλών επιλογών κάθε ερώτηση συνοδεύεται από 4 εναλλακτικές απαντήσεις. Ο διαγωνιζόμενος πρέπει να σημειώσει μία των απαντήσεων. Αν η απάντηση είναι σωστή, τότε βαθμολογείται με 3 μονάδες ενώ αν είναι λάθος βαθμολογείται με –1. Να προσδιοριστεί η αναμενόμενη βαθμολογία ανά ερώτηση αν
α) Ο διαγωνιζόμενος επιλέγει την απάντηση στην τύχη
β) Ο διαγωνιζόμενος γνωρίζει μία από τις λανθασμένες απαντήσεις και επιλέγει στην τύχη από τις τρεις που απομένουν. Σχολιάστε το αποτέλεσμα σε κάθε περίπτωση.

ΟΜΑΔΑ Β

1. Η τ.μ Χ έχει πίνακα κατανομής πιθανότητας :

x_j	-1	0	1
P[X=x]	p	q	2p

α) Να βρεθεί το q ως συνάρτηση του p
β) Να βρεθούν οι E[X] και Var[X] ως συναρτήσεις του p.

2. Σε δείγμα ν = 6 λαμπτήρων οι 2 είναι καμένοι και οι 4 λειτουργούν. Ελέγχουμε τους λαμπτήρες ένα-ένα με τυχαία επιλογή. Να βρεθεί η πιθανότητα ο απαιτούμενος αριθμός λαμπτήρων που θα ελεγχθούν ώστε να εντοπιστούν και οι δύο καμένοι να είναι:
α) τρεις β) το πολύ τέσσερις

3. Αμερόληπτο νόμισμα έχει στην μία πλευρά του τον αριθμό 1 και στην άλλη τον αριθμό 2. Ταυτόχρονα με το νόμισμα στρίβουμε και ένα αμερόληπτο ζάρι και συμβολίζουμε με Z το άθροισμα των ενδείξεων νομίσματος και ζαριού. Να κατασκευαστεί ο πίνακας κατανομής πιθανότητας της τ.μ Z και να υπολογιστεί η E[Z].

4. Δύο ζάρια έχουν τις έδρες τους αριθμημένες με τους αριθμούς 0,0,0,1,1,2 και 2,2,3,3,4,4,. Συμβολίζουμε με Z το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται μετά την ρίψη των ζαριών. Να βρεθεί η E[Z] και η Var[Z].

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Στρίψτε ένα ζάρι τέσσερις φορές και καταγράψτε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας πίνακα διαλογής.

Υπολογίστε τον μέσο των αποτελεσμάτων που βρήκατε.

Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά των συμμαθητών σας, διαπιστώνοντας ότι όλοι σχεδόν οι συμμαθητές σας έχουν βρει μέση τιμή αποτελεσμάτων αριθμό μεταξύ του 2 και του 5.

Επαναλάβετε το πείραμα άλλες 36 φορές και υπολογίστε εκ νέου τον μέσο για το σύνολο των 40 τιμών. Πρέπει τώρα να διαπιστώσετε ότι οι τιμές των μέσων των συμμαθητών σας είναι μεταξύ 3 και 4.

Όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων του πειράματος τόσο πλησιέστερα στον αριθμό 3,5 έρχεται ο μέσος.

Υπολογίστε τον μέσο χρησιμοποιώντας τους μέσους που βρήκαν οι συμμαθητές σας.