ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Συνδυαστική - Πιθανότητες

Απαρίθμηση

Διατάξεις

Μεταθέσεις

Διατάξεις με επανάληψη

Συνδυασμοί

Πείραμα τύχης – Δειγματικός χώρος

Πράξεις με ενδεχόμενα

Έννοια Πιθανότητας

Ορισμός Πιθανότητας

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

2.1 Απαρίθμηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε τεχνικές απαρίθμησης των στοιχείων ενός συνόλου. Το ρήμα "απαριθμώ" αναφέρεται στην ένα προς ένα καταγραφή των στοιχείων ενός συνόλου. Η πράξη της καταγραφής λέγεται **απαρίθμηση.** Παράδειγμα απαρίθμησης αποτελεί η καταγραφή του αριθμού των μαθητών της Γ' Λυκείου που επέλεξαν το μάθημα της Στατιστικής.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Αν μια διαδικασία είναι δυνατόν να χωρισθεί σε ν διαδοχικές φάσεις, έτσι ώστε η πρώτη φάση να μπορεί να εκτελεστεί με κ_1 τρόπους, η δεύτερη με κ_2 τρόπους ... και η ν-οστή με κ_ν τρόπους, τότε αυτή η διαδικασία μπορεί να εκτελεστεί με $\kappa_1.\kappa_2...\kappa_\nu$ διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα 1°:

Ένα γραφείο ταξιδιών έχει 4 οδηγούς και 3 πούλμαν. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ένας οδηγός και ένα πούλμαν να συνδυασθούν σε ένα ταξίδι ;

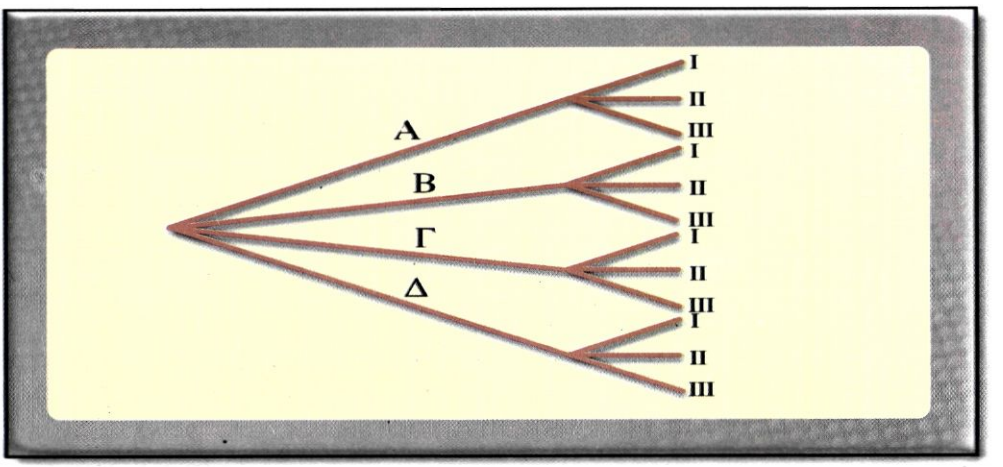
Απάντηση

Η ύπαρξη 4 οδηγών και 3 πούλμαν παρέχει $\kappa_1=4$ δυνατότητες επιλογής οδηγού και $\kappa_2=3$ δυνατότητες επιλογής πούλμαν, με συνέπεια να έχουμε $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 4 \cdot 3 = 12$ διαφορετικούς τρόπους συνδυασμού οδηγού και πούλμαν για ένα ταξίδι.

Ένας τρόπος παρουσίασης της απαρίθμησης είναι το

«δενδροδιάγραμμα»

Αν συμβολίσουμε τους 4 οδηγούς με Α, Β, Γ, Δ και τα 3 πούλμαν με Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, οι δώδεκα διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να συνδυαστούν ένας οδηγός και ένα πούλμαν, δίνονται στο δενδροδιάγραμμα του Σχήματος (2.1).



Σχήμα (2.1) Δενδροδιάγραμμα των τρόπων συνδυασμού οδηγού και πούλμαν

Παράδειγμα 2ο:

Μία πινακίδα αριθμού κυκλοφορίας αυτοκινήτου περιέχει τρία γράμματα, τα οποία ακολουθούνται από ένα τετραψήφιο αριθμό. Πόσες διαφορετικές πινακίδες μπορούμε να κατασκευάσουμε αν θέλουμε τα γράμματα να είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να χρησιμοποιούνται μόνο εκείνα που υπάρχουν και στο Λατινικό αλφάβητο;

Απάντηση

Από τα 24 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου πρέπει να εξαιρέσουμε τα Γ, Δ, Θ, Λ. Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ, Ω που δεν υπάρχουν στο Λατινικό αλφάβητο. Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τα υπόλοιπα 14 γράμματα. Άρα το πρώτο τμήμα της πινακίδας καλύπτεται με $14 \cdot 13 \cdot 12 =$ **2.184** τρόπους.

Το δεύτερο τμήμα της πινακίδας καλύπτεται με $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ **9.000** τρόπους, αφού το 0 δεν μπορεί να γραφεί στη θέση των χιλιάδων. Άρα υπάρχουν $(2.184) \cdot (9.000) = 219.656.000$ διαφορετικές πινακίδες.

Το ν! (παραγοντικό)

Για κάθε ν ∈ N* το σύμβολο ν! διαβάζεται "ν παραγοντικό" και ορίζεται ως ν!=1·2·3·....ν με 0!=1 1!=1

Π.χ. $2! = 1 \cdot 2 = 2$

Π.χ. $12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 = 479.001.600$

Ισχύει για κάθε ν ∈ N* ότι : ν! = (ν-1) !ν

Π.χ. $14! = (14 - 1)! \cdot 4 = 13! \cdot 4$

Διατάξεις – Μεταθέσεις – Συνδυασμοί

2.2 Διατάξεις

Η βασική αρχή της απαρίθμησης εφαρμόζεται συχνά σε προβλήματα επιλογής κάποιων στοιχείων ενός συνόλου και τοποθέτησής τους σε σειρά.

Παράδειγμα 3ο :

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους οι 285 μαθητές ενός σχολείου μπορούν να εκλέξουν τον πρόεδρο, τον αντιπρόεδρο και το γραμματέα του 15μελούς συμβουλίου τους;

Απάντηση

Εφαρμόζοντας τη βασική αρχή της απαρίθμησης: $\kappa_1 = 285$, $\kappa_2 = 284$, $\kappa_3 = 283$ (αδιαφορώντας ποιος θα επιλέγει πρώτος, δεύτερος, τρίτος) έχουμε:

$285 \cdot 284 \cdot 283 =$ **22.906.020** διαφορετικούς τρόπους

Έστω ένα μη κενό σύνολο $\mathbf{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu\}$, $\nu \in N^*$ και $\kappa \in N^*$, $\kappa \leq \nu$

Διάταξη

Καλείται *διάταξη* των ν αυτών στοιχείων του Α ανά κ, *κάθε τοποθέτηση* σε μία σειρά κ διαφορετικών στοιχείων του Α

Αν παραστήσουμε με Δ_κ^ν το πλήθος των διατάξεων αυτών, τότε με εφαρμογή της βασικής αρχής της απαρίθμησης αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\Delta_\kappa^\nu = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1)}$$

Πράγματι έχουμε να συμπληρώσουμε κ θέσεις:

1	2	3	...	κ
ν	ν-1	ν-2	...	ν-κ+1

Η 1η θέση μπορεί να συμπληρωθεί με ν τρόπους,
Η 2η θέση μπορεί να συμπληρωθεί με ν-1 τρόπους,
...
...
...
Η κ_η θέση μπορεί να συμπληρωθεί με ν-κ+1 τρόπους.

Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή της απαρίθμησης, οι κ το πλήθος θέσεις μπορούν να συμπληρωθούν με $\nu \cdot (\nu-1) \cdot (\nu-2)....(\nu-\kappa+1)$ τρόπους ή

$$\Delta_{\kappa}^{\nu} = \nu(\nu-1)(\nu-2)....(\nu-\kappa+1)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο του παραγοντικού για να εκφράσουμε το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ, με $\kappa < \nu$ έχουμε :

$$\Delta_{\kappa}^{\nu} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)....(\nu-\kappa+1)(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1)....2\cdot 1}{1\cdot 2....(\nu-\kappa-1)(\nu-\kappa)} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

δηλαδή $$\boxed{\Delta_{\kappa}^{\nu} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}}$$

Παράδειγμα 4ο:

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να απονεμηθούν τα μετάλλια χρυσό, αργυρό και χάλκινο στους 8 αθλητές που συμμετέχουν στον τελικό του δρόμου των 100 μέτρων;

Απάντηση:

Οι τρόποι που μπορούν να απονεμηθούν τα μετάλλια χρυσό, αργυρό και χάλκινο στους 8 αθλητές του δρόμου των 100 μέτρων είναι όσες και οι διατάξεις των 8 ανά 3, δηλαδή :

$$\Delta_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6\cdot 7\cdot 8 = 336 \text{ τρόποι}$$

2.3 Μεταθέσεις

Μετάθεση
Μια διάταξη όλων των ν στοιχείων του Α ανά ν ονομάζεται μετάθεση των ν στοιχείων του Α

Αν παραστήσουμε με M_ν το πλήθος των μεταθέσεων αυτών, τότε πάλι με εφαρμογή της βασικής αρχής της απαρίθμησης προκύπτει $M_\nu = 1\cdot 2\cdot 3...\nu$, δηλαδή:

$$\boxed{M_\nu = \nu!}$$

Παράδειγμα 5°:

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να εμφανιστούν στο γήπεδο οι 8 ομάδες ποδοσφαίρου ενός από τους 3 ομίλους του παγκόσμιου κυπέλλου ;

Απάντηση:

Οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους οι ομάδες ποδοσφαίρου μπορούν να παρουσιαστούν στο γήπεδο είναι όσες και οι μεταθέσεις των 8 ομάδων, δηλαδή

$$M_8 = 8! = 40.320 \text{ τρόποι}$$

2.4 Διατάξεις με επανάληψη

Έστω το σύνολο Α={1, 2, 3, 4}. Θέλουμε να βρούμε το πλήθος των τριψήφιων αριθμών που μπορούμε να σχηματίσουμε με ψηφία τα στοιχεία του Α, όταν κάθε αριθμός μπορεί να έχει μερικά ή και όλα τα ψηφία του ίδια. Έχουμε να συμπληρώσουμε 3 θέσεις :

Η 1η θέση, δηλαδή το ψηφίο των εκατοντάδων, μπορεί να συμπληρωθεί με 4 τρόπους.

Η 2η θέση, δηλαδή το ψηφίο των δεκάδων, μπορεί να συμπληρωθεί επίσης με 4 τρόπους, τέλος και η 3η θέση, δηλαδή το ψηφίο των μονάδων, μπορεί να συμπληρωθεί με 4 τρόπους.

Άρα υπάρχουν συνολικά $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ διαφορετικοί αριθμοί. Κάθε μία από τις διατεταγμένες αυτές τριάδες λέγεται **διάταξη με επανάληψη** των 4 στοιχείων ανά 3.

Γενικά:

Διατάξεις με επανάληψη

Διάταξη με επανάληψη των ν στοιχείων ανά κ είναι, κάθε τοποθέτηση σε σειρά κ στοιχείων που λαμβάνονται από τα ν, αν κάθε στοιχείο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι κ φορές (εδώ το κ μπορεί να είναι ίσο, μικρότερο ή μεγαλύτερο του ν).

Αν παραστήσουμε με E_{κ}^{ν} το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των ν στοιχείων ανά κ, τότε με συλλογισμούς ανάλογους με αυτούς του παραδείγματος θα έχουμε:

$$\boxed{E_{\kappa}^{\nu} = \nu^{\kappa}}$$

Για παράδειγμα οι διαφορετικές στήλες που μπορούμε να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟ-ΠΟ είναι όσες οι διατάξεις με επανάληψη των 3 ανά 13,

δηλαδή: $E_{13}^{3} = 3^{13} = 1.594.323$ στήλες.

2.5 Συνδυασμοί

Από **πέντε** μαθήτριες μιας τάξης {Γ, Μ, Ι, Α, Σ} θέλουμε να επιλέξουμε τριμελή ομάδα μαθητριών, χωρίς να μας ενδιαφέρει η κατάταξη των μελών της ομάδας, προκειμένου να συμμετάσχουν στο ανέβασμα ενός θεατρικού έργου **τριών** ρόλων. Αν x είναι ο αριθμός των διαφορετικών **τριμελών** θεατρικών ομάδων που μπορούμε να επιλέξουμε, τότε σε κάθε τέτοια ομάδα η διανομή των ρόλων μπορεί να γίνει κατά **3! τρόπους**.

Επομένως, αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούν να διανεμηθούν οι 3 ρόλοι, στις x θεατρικές ομάδες βρίσκουμε $3!\cdot x$. Ο αριθμός αυτός όμως είναι το πλήθος των διατάξεων των 5 κοριτσιών ανά 3 δηλαδή:

$$\Delta_3^5 = 3!\cdot x \text{ οπότε } x = \frac{\Delta_3^5}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{60}{3} = 10.$$

και συνεπώς ο συνολικός αριθμός των τριμελών θεατρικών ομάδων που μπορούν να γίνουν από το σύνολο των πέντε μαθητριών είναι 10 και συγκεκριμένα οι:

{Γ, Μ, Ι} , {Γ, Μ, Α} , {Γ, Μ, Σ} , {Γ, Ι, Α, } , {Γ, Ι, Σ} ,
{Γ, Α, Σ} , {Μ, Ι, Α} , {Μ, Ι, Σ} , {Μ, Α, Σ} , {Ι, Α, Σ}.

Κάθε επιλογή από τις δέκα δυνατές επιλογές λέγεται **συνδυασμός** των 5 ανά 3.

Γενικά :

Συνδυασμός

Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ, είναι κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ, το συμβολίσουμε με $\binom{\nu}{\kappa}$ και αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα βρίσκουμε ότι:

Από κάθε συνδυασμό των ν ανά κ προκύπτουν κ! διατάξεις. Επομένως, το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ είναι :

$$\Delta_{\kappa}^{\nu} = \kappa! \binom{\nu}{\kappa} \text{ ή}$$

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\Delta_{\kappa}^{\nu}}{\kappa!} = \frac{\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}}{\kappa!} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}} \text{ δηλαδή}$$

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}}$$

Παράδειγμα 6ο:

Ένας μαθητής πρέπει να απαντήσει στις εξετάσεις της Ιστορίας σε 6 από 9 ερωτήσεις. Πόσες επιλογές έχει;

Απάντηση

Οι επιλογές που έχει ένας μαθητής να απαντήσει στις 6 από τις 9 ερωτήσεις είναι όσες και οι συνδυασμοί των 9 ανά 6, δηλαδή:

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$$

Εφαρμογή:

α) Για κάθε x,y ∈ R και ν∈ N^* ισχύει :

$$(x+y)^{\nu}=\binom{\nu}{0}x^{\nu}+\binom{\nu}{1}x^{\nu-1}y+\ldots+\binom{\nu}{\nu-1}xy^{\nu-2}+\binom{\nu}{\nu}y^{\nu}$$ (τύπος του διωνύμου)

Να δείξετε ότι: $\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}$

β) Να δείξετε ότι: $\binom{\nu}{\mu}=\binom{\nu-1}{\mu-1}+\binom{\nu-1}{\mu}$, ν, μ ∈ N* και μ≤ν

Απάντηση:

α) Για x=y=1 από τον τύπο του διωνύμου έχουμε :

$$(1+1)^{\nu}=\binom{\nu}{0}1^{\nu}+\binom{\nu}{1}1^{\nu-1}.1+\ldots+\binom{\nu}{\nu-1}1.1^{\nu-1}+\binom{\nu}{\nu}1^{\nu}$$

οπότε :

$$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}$$

β) Έχουμε :

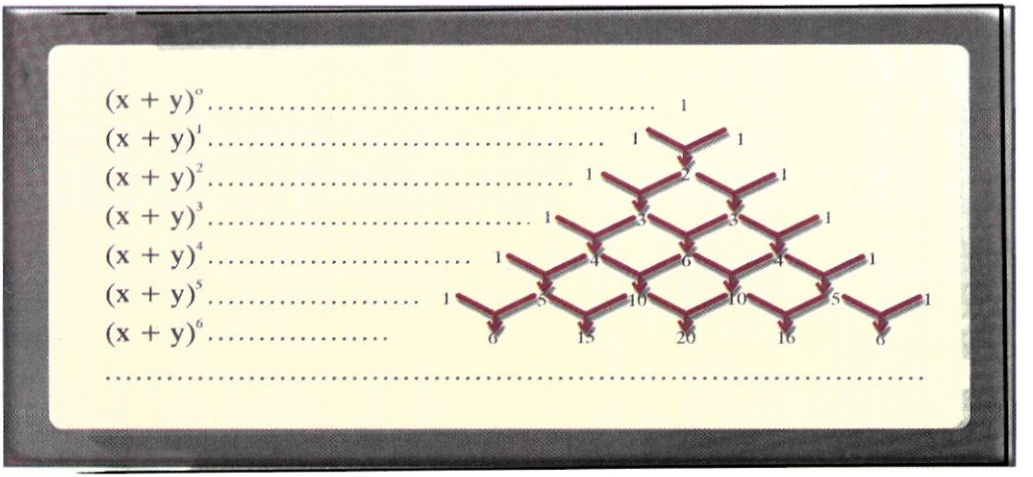
$$\binom{\nu}{\mu}=\binom{\nu-1}{\mu-1}+\binom{\nu-1}{\mu}=\frac{(\nu-1)!}{(\mu-1)![(\nu-1)-(\mu-1)]!}+\frac{(\nu-1)!}{\mu!(\nu-1-\mu)!}=$$

$$=\frac{(\nu-1)!}{(\mu-1)!(\nu-\mu)!}+\frac{(\nu-1)!}{\mu!(\nu-\mu-1)!}=\frac{(\nu-1)!}{(\mu-1)!(\nu-\mu-1)!}\left[\frac{1}{\nu-\mu}+\frac{1}{\mu}\right]=$$

$$=\frac{(\nu-1)!}{(\mu-1)!(\nu-\mu-1)!}\cdot\frac{\mu+\nu-\mu}{\mu(\nu-\mu)}=\frac{(\nu-1)!\nu}{(\mu-1)!\mu(\nu-\mu-1)!(\nu-\mu)}=$$

$$=\frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}=\binom{\nu}{\mu}$$

Σημείωση: Στην παραπάνω πρόταση στηρίζεται η κατασκευή του τριγώνου Pascal, το οποίο μας δίνει ένα πρακτικό κανόνα για τον υπολογισμό των συντελεστών των όρων του $(x+y)^{\nu}$



Η ν-οστή σειρά του τριγώνου αυτού, δίνει τους συντελεστές του αναπτύγματος $(x+y)^{\nu-1}$, π.χ. για ν = 5 έχουμε:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ Α

1. Με πόσους τρόπους 9 παιχνίδια μπορούν να μοιρασθούν σε 4 παιδιά, αν το νεώτερο πάρει 3 παιχνίδια και το καθένα από τα υπόλοιπα 2 παιχνίδια ;

2. Πόσοι είναι οι τρόποι με τους οποίους 10 βιβλία μπορούν να διανεμηθούν σε 5 μαθητές, ώστε κάθε μαθητής να πάρει 2 βιβλία ;

3. Σε μία διεθνή σύσκεψη συμμετέχουν 3 Αμερικανοί, 4 Γάλλοι, 3 Γερμανοί και 2 Έλληνες. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν έτσι, ώστε τα μέλη της ίδιας εθνικότητας να κάθονται μαζί ;

4. Βρείτε τον αριθμό των αναγραμματισμών που μπορούν να προκύψουν από τις λέξεις:
   α) ΣΕΙΡΑ
   β) ΠΟΣΟΣΤΟ
   γ) ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
   (Ανεξάρτητα από το νόημα των λέξεων)

ΟΜΑΔΑ Β

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

   α) $\Delta_3^{\nu} + 3\Delta_2^{\nu} = \frac{1}{2}P_{\nu+1}$ β) $3\binom{\nu}{\nu-3} = 5\binom{\nu}{\nu-5}$

2. Πόσες μεταθέσεις των στοιχείων 1, 2, …, ν υπάρχουν στις οποίες το 1 δεν κατέχει την 1η θέση;

3. Με πόσους τρόπους 12 μαθητές μιας τάξης μπορούν να χωρισθούν σε τρεις ομάδες των 4 ατόμων, προκειμένου να τους ανατεθούν τρεις διαφορετικές εργασίες; Πόσοι είναι οι τρόποι αυτοί με τους οποίους μπορούν να χωρισθούν οι 12 μαθητές της τάξης σε τρεις ομάδες των 4 ατόμων ;

4. α) Θεωρούμε την ταυτότητα $(1+x)^{\nu}(x+1)^{\nu} = (1+x)^{2\nu}$, όπου $\nu \in N$.
   Να αναπτύξετε καθένα διώνυμο και να βρείτε το συντελεστή του x^{ν} στο 1ο μέλος και στο 2ο μέλος της ταυτότητας.

β) Να δείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{0}^2+\binom{\nu}{1}^2+\ldots+\binom{\nu}{\nu}^2=\binom{2\nu}{\nu}$$

2.6 Πείραμα τύχης – Δειγματικός χώρος

Με τον όρο «πείραμα» εννοούμε κάθε διαδικασία που καταλήγει σε ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ή όπως διαφορετικά λέγονται ***παρατηρήσεις*** ή ***εξαγόμενα***.

Η εκτέλεση ενός πειράματος ονομάζεται ***δοκιμή*** ή ***προσπάθεια*** και μπορεί να επαναληφθεί μία ή περισσότερες φορές. Τα πειράματα διακρίνονται σε προσδιορίσιμα και σε ***μη προσδιορίσιμα*** ή ***τυχαία***.

Προσδιορίσιμο ονομάζεται ένα πείραμα όταν τα αποτελέσματά του είναι γνωστά με ακρίβεια πριν από την εκτέλεσή του. Έτσι, π.χ. όταν θερμαίνουμε μια ποσότητα αποσταγμένου νερού υπό πίεση 760 mm Hg, ξέρουμε εκ των προτέρων ότι το νερό θα αρχίσει να βράζει όταν η θερμοκρασία του φθάσει στους 100°C.

Αντιθέτως, ***μη προσδιορίσμο*** ή ***τυχαίο*** ονομάζεται ένα πείραμα όταν τα αποτελέσματά του δεν μπορούν να προβλεφθούν με ακρίβεια, μολονότι επαναλαμβάνονται(φαινομενικά τουλάχιστον) πάντοτε κάτω από τις ίδιες συνθήκες, π.χ. στο πείραμα της ρίψης ενός ζαριού, το αποτέλεσμα θα είναι βέβαια ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, αλλά ποιος ακριβώς, δεν είναι δυνατόν εκ των προτέρων να προβλεφθεί.

Δειγματικός χώρος

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του τυχαίου πειράματος αποτελεί το δειγματικό χώρο Ω.

Δειγματικό σημείο

Κάθε ένα από τα δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος ονομάζεται *στοιχειώδες ενδεχόμενο* ή *δειγματικό σημείο* ή *εξαγόμενο*.

Ενδεχόμενο

Κάθε υποσύνολο Α του δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται *ενδεχόμενο*.

Π.χ. αν το πείραμα είναι η ρίψη ενός νομίσματος 2 φορές, ο δειγματικός χώρος είναι

$$\Omega = \{ΚΓ, ΓΓ, ΚΚ, ΓΚ\} \text{ και το σύνολο } A = \{ΚΚ, ΓΓ\} \subseteq \Omega$$

αποτελεί ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω. Όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μία συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο του Α, τότε λέμε ότι **το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται**.

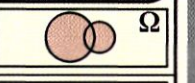
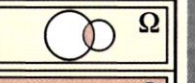
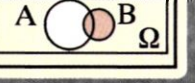
Ένα ενδεχόμενο ονομάζεται **απλό**, όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο**, αν έχει περισσότερα από ένα στοιχεία. Το κενό σύνολο ∅ και το σύνολο Ω είναι ενδεχόμενα. Το ∅ στη γλώσσα των πιθανοτήτων ονομάζεται ***αδύνατο ενδεχόμενο***, ενώ το Ω ***βέβαιο ενδεχόμενο***.

2.7 Πράξεις με ενδεχόμενα

Μπορούμε να συνδυάσουμε ενδεχόμενα προς δημιουργία νέων ενδεχομένων χρησιμοποιώντας τις γνωστές πράξεις των συνόλων.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται συνοπτικά οι σημαντικότερες πράξεις μεταξύ δύο ενδεχομένων και το αντίστοιχο κάθε φορά διάγραμμα του Venn.

Διάγραμμα του Venn

Συμβολισμός	Ενδεχόμενο	Σημασία	Παράσταση
$A \cup B$	"Α ή Β"	Το $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α. Β.	
$A \cap B$	"Α και Β"	Το $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως το Α και Β.	
A'	"ΟΧΙ Α" " ή αντίθετο του Α" "ή συμπλήρωμα του Α"	Το A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α	
$A-B$	"διαφορά του Β από το Α"	Το $A-B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β	

Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται **ασυμβίβαστα**, ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα** όταν $A \cap B = \varnothing$

2.8 Έννοια Πιθανότητας

Σε τυχαίο πείραμα συνηθίζουμε να εκφράζουμε την προσωπική μας γνώμη για το βαθμό βεβαιότητας εμφάνισης ενός ενδεχομένου.

Λέμε π.χ. Ότι είναι σχεδόν αδύνατο στις 20 ρίψεις ενός ζαριού να φέρουμε 20 άσσους.

Ότι είναι πιθανό να βρέξει κατά τη διάρκεια των αγώνων

ή

Ότι πιθανότατα ο Γιώργος θα είναι ο νέος αρχηγός της ομάδας μπάσκετ του σχολείου του.

Στα παραπάνω παραδείγματα δίνουμε την προσωπική μας εκτίμηση για το «βαθμό βεβαιότητας» ή διαφορετικά για το «μέτρο της πιθανότητας» πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου. Αυτό όμως που χρειαζόμαστε πολύ περισσότερο είναι ένα **αντικειμενικό** και όχι υποκειμενικό μέτρο πιθανότητας και το οποίο θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε στην παρούσα ενότητα.

2.9 Ορισμός Πιθανότητας

Από πρακτικής άποψης, η παρακάτω ερμηνεία της πιθανότητας φαίνεται να είναι η χρησιμότερη.

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος και Α ένα ενδεχόμενο του. Θεωρούμε ένα αριθμό ν επαναλαμβανομένων δοκιμών, των οποίων τα αποτελέσματα περιέχονται στο σύνολο Ω. Αν κ ο αριθμός εμφάνισης του ενδεχόμενου Α στις ν επαναλαμβανόμενες δοκιμές, τότε η πιθανότητα Ρ(Α) του ενδεχομένου Α, ορίζεται ως:

$$\boxed{P(A) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\kappa}{\nu}} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι, για σταθερό ν, η ποσότητα $\frac{\kappa}{\nu}$ είναι η **σχετική συχνότητα** του ενδεχομένου Α και συμβολίζεται με f_A.

Είναι πρακτικώς αδύνατο να επαναλάβουμε το πείραμα άπειρες, το πλήθος, φορές ($\nu \to +\infty$), για να προσδιορίσουμε το όριο της σχέσης (2.1). Μπορούμε να παρατηρήσουμε όμως ότι, όσο αυξάνει ο αριθμός ν των δοκιμών, η σχετική συχνότητα f_A εμφάνισης του ενδεχομένου Α σταθεροποιείται γύρω από μια συγκεκριμένη τιμή, όπως θα δούμε στα παρακάτω δύο παραδείγματα.

Κατά την εκτέλεση του πειράματος της ρίψης ενός ζαριού, οι συχνότητες εμφάνισης των όψεων 1, 2, 3, 4, 5, 6 στις 25, 50, 100, 500, 1.000, 2.000, 5.000, 8.000, 12.000 ρίψεις φαίνονται στον πίνακα:

Πίνακας συχνοτήτων

Ενδείξεις ζαριού	v=25 v_i	v=50 v_i	v=100 v_i	v=500 v_i	v=1000 v_i	v=2000 v_i	v=5000 v_i	v=8000 v_i	v=12000 v_i
1	5	12	25	96	189	376	960	1528	2292
2	4	14	22	102	195	392	955	1512	2256
3	7	9	18	95	199	404	1045	1656	2496
4	4	8	15	65	141	270	690	1128	1692
5	3	2	9	84	155	288	655	1080	1608
6	2	5	11	58	121	270	695	1096	1656

Διαιρώντας τη συχνότητα εμφάνισης μιας όψης με τον αριθμό των ρίψεων, βρίσκουμε τη σχετική συχνότητα της εμφάνισης της όψης αυτής. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων :

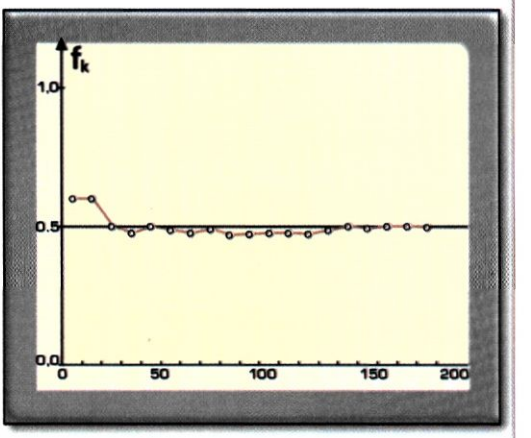
Ενδείξεις ζαριού	v=25 F_i	v=50 F_i	v=100 F_i	v=500 F_i	v=1000 F_i	v=2000 F_i	v=5000 F_i	v=8000 F_i	v=12000 F_i
1	0,200	0,240	0,250	0,192	0,189	0,188	0,192	0,191	0,191
2	0,160	0,280	0,220	0,204	0,195	0,196	0,191	0,189	0,188
3	0,280	0,180	0,180	0,190	0,199	0,202	0,209	0,207	0,208
4	0,160	0,160	0,150	0,130	0,141	0,135	0,138	0,141	0,141
5	0,120	0,040	0,090	0,168	0,155	0,144	0,131	0,135	0,134
6	0,080	0,100	0,110	0,116	0,121	0,135	0,139	0,137	0,138
	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Πίνακας σχετικών συχνοτήτων

Παρατηρούμε ότι όταν αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων, η σχετική συχνότητα εμφάνισης κάθε όψης σταθεροποιείται γύρω από κάποιο αριθμό (εδώ είναι διαφορετικός για κάθε όψη). Κατά την εκτέλεση του πειράματος της ρίψης ενός νομίσματος σημειώνουμε με Κ το αποτέλεσμα «κεφάλι» και με Γ το αποτέλεσμα «γράμματα». Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται το πλήθος των Κ και οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες στις 10, 20, 30, …, 200 ρίψεις του νομίσματος και στο Σχ. (2.2) παριστάνεται το αντίστοιχο διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων:

Πίνακας ρίψεων ενός νομίσματος

V	Συχνότητα εμφάνισης του Κ	Σχετική Συχνότητα
10	6	0,600
20	12	0,600
30	15	0,500
40	19	0,475
50	25	0,500
60	30	0,500
70	34	0,486
80	38	0,475
90	44	0,489
100	47	0,470
110	52	0,473
120	57	0,475
130	62	0,477
140	66	0,471
150	73	0,487
160	80	0,500
170	84	0,444
180	90	0,500
190	95	0,500
200	99	0,495



Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων, η σχετική συχνότητα $f_κ$ εμφάνισης του «κεφαλιού» σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή όπως λέμε «τείνει» στον αριθμό 0,5.

Με άλλα λόγια, σε ένα μεγάλο αριθμό ρίψεων ενός «**αμερόληπτου**» νομίσματος, δηλαδή ενός νομίσματος που είναι συμμετρικό και ομογενές, αναμένουμε ότι οι σχετικές συχνότητες των ενδεχομένων {Κ}, {Γ} είναι ίσες.

Ομοίως και στο προηγούμενο παράδειγμα, αν το ζάρι ήταν αμερόληπτο, η σχετική συχνότητα καθενός από τα απλά ενδεχόμενα {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} θα έτεινε στον αριθμό 1/6.

Σε τέτοια πειράματα λέμε ότι ο δειγματικός χώρος (δ.χ) αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Έτσι :

Αν Ω είναι ένας δ.χ. με απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα, τότε η **πιθανότητα ενός ενδεχόμενου Α** είναι :

$$P(A) = \frac{\text{αριθμός των στοιχείων του } A}{\text{αριθμός των στοιχείων του } \Omega} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

ή όπως λέμε :

$$P(A) = \frac{\textit{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\textit{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$$

Υπάρχουν όμως πειράματα τύχης των οποίων ο δειγματικός χώρος δεν αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας:

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που το συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\boxed{0 \le P(\omega_i) \le 1}$
- $\boxed{P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_\nu) = 1}$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα Ρ(Α) ενός ενδεχομένου $\boxed{A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\} \ne \varnothing}$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+\ldots+P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$.

Αν $P(\omega_i) = \frac{1}{\nu}$, i=1, 2,…, ν, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Στην πράξη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν ισχύει ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας.

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει ότι:

1. $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$

2. $P(\varnothing) = \frac{N(\varnothing)}{N(\Omega)} = 0$

3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0 \le P(A) \le 1$, αφού $0 \le N(A) \le N(\Omega)$

2.10 Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως «κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων»

1. **Άθροισμα** : Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύει :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
Αν τα Α, Β είναι **ασυμβίβαστα**, τότε :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
2. **Ανισότητα** : Για δύο ενδεχόμενα Α, Β για τα οποία $A \subseteq B$, δηλαδή το ενδεχόμενο Α περιέχεται στο Β, ισχύει :
$$P(A) \leq P(B)$$
3. **Συμπλήρωμα** : Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει :
$$P(A) + P(A') = 1$$
όπου Α΄ το συμπλήρωμα του Α ως προς το Ω

2.11 Δεσμευμένη πιθανότητα

Ένας από τους καθηγητές Γυμνασίου-Λυκείου πρόκειται να εκλεγεί ως εκπρόσωπος στην επιτροπή παιδείας του Δήμου. Υποψήφιοι είναι από το Γυμνάσιο 4 άνδρες, 2 γυναίκες και από το Λύκειο 1 άνδρας και 3 γυναίκες.

Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα οι υποψήφιοι μπορούν να ταξινομηθούν στον ακόλουθο πίνακα ως εξής:

	Καθηγητής	
	Γυμνασίου	Λυκείου
Άνδρας (Δ)	4	1
Γυναίκα (Β)	2	3

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α : Να εκλεγεί καθηγητής Γυμνασίου

Β : Να εκλεγεί γυναίκα

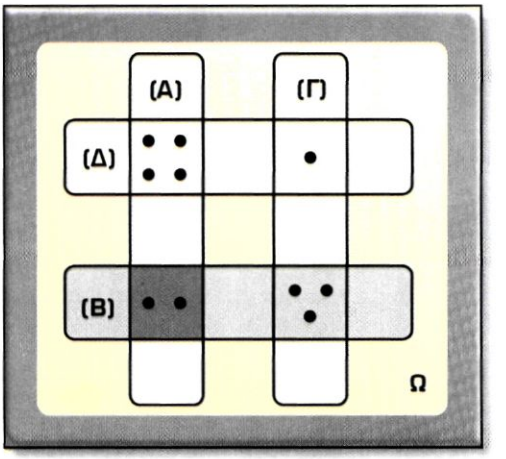
Ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω δίνεται στο Σχ.(2.3), όπου κάθε σημείο αντιπροσωπεύει έναν υποψήφιο.

Με την παραδοχή ότι τα 10 στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα έχουμε :

$$P(A) = \frac{6}{10} \quad \text{και} \quad P(B) = \frac{5}{10}.$$

Αν υποθέσουμε ότι έχει κληρωθεί γυναίκα, τότε έχει πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β. Αυτό σημαίνει ότι ο εκπρόσωπος θα είναι μία από τις 5 γυναίκες και επομένως, η πιθανότητα να είναι καθηγήτρια του Γυμνασίου είναι $\frac{2}{5}$.

Πράγματι, με την πληροφορία ότι έχει κληρωθεί γυναίκα ο μεν δειγματικός χώρος Ω περιορίζεται στο ενδεχόμενο Β το δε ενδεχόμενο Α στο ενδεχόμενο $A \cap B$. Η πιθανότητα του Α με δεδομένη την εμφάνιση του Β ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα** του Α με δεδομένο το Β και συμβολίζεται P(A/B). Παρατηρούμε ότι. P(A/B) είναι γενικώς διαφορετική της P(A).



Σχ. (2.3)

Με την αρχική αποδοχή ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα, απλά ενδεχόμενα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P(A/B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{\dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}}{\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Γενικά :

Δεσμευμένη πιθανότητα

Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και P(B)>0, τότε ο λόγος $\boxed{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ λέγεται δεσμευμένη πιθανότητα του Α με δεδομένο το Β και συμβολίζεται με P(A/B), δηλαδή : $P(A/B)=\boxed{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$, με P(B)>0

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει : $P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$

Αν P(A)>0, ανάλογα έχουμε: $P(B/A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ και $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$

Άμεση συνέπεια των παραπάνω ορισμών είναι ότι :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)}$$

Οι παραπάνω ισότητες εκφράζουν το **πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων.**

Παράδειγμα 7ο:

Μια κάλπη περιέχει 7 σφαίρες μπλε και 3 κόκκινες. Δύο σφαίρες επιλέγονται τυχαία, διαδοχικά, χωρίς επανατοποθέτηση. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η πρώτη σφαίρα να είναι κόκκινη και η δεύτερη μπλε:

Απάντηση:

Έστω τα ενδεχόμενα :

Α : η σφαίρα είναι κόκκινη

Β : η σφαίρα είναι μπλε

Η πιθανότητα η πρώτη σφαίρα να είναι κόκκινη είναι $P(A)=\frac{3}{10}$

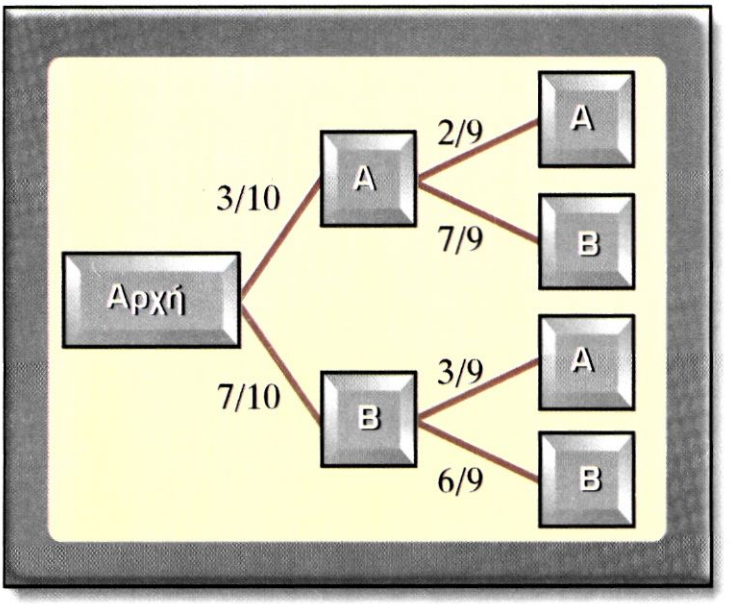
Η δεύτερη σφαίρα επιλέγεται από κάλπη που περιέχει 7 σφαίρες μπλε και 2 κόκκινες. Άρα η πιθανότητα η δεύτερη σφαίρα να είναι μπλε είναι:

$$P(B/A)=\frac{7}{9}$$

Έτσι η πιθανότητα κατά την πρώτη επιλογή να έχουμε κόκκινη σφαίρα και κατά τη δεύτερη μπλε είναι:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

Το παρακάτω δενδροδιάγραμμα περιγράφει τη διαδικασία αυτή και δίνει την πιθανότητα κάθε κλάδου του δένδρου χωριστά.



Πιθανότητα

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{30}$$

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{14}{30}$$

2.12 Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Έστω το πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου νομίσματος δύο φορές, με δειγματικό χώρο το σύνολο:

Ω={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}

Προφανώς : P(ΚΚ)=P(ΚΓ)=P(ΓΚ)=P(ΓΓ)=$\frac{1}{4}$

Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα :

Α : Γράμματα στη δεύτερη ρίψη : Α={ΚΓ, ΓΓ}

Β : Κεφάλι στην πρώτη ρίψη : Β={ΚΚ, ΚΓ}

Δ : Κεφάλι και στις δύο ρίψεις : Δ={ΚΚ}

Τότε είναι P(Α)=$\frac{1}{2}$, P(Β)=$\frac{1}{2}$, P(Δ)=$\frac{1}{4}$

Με την πληροφορία ότι το ενδεχόμενο Δ={ΚΚ} έχει πραγματοποιηθεί, η δεσμευμένη πιθανότητα του Β με δεδομένη την πραγματοποίηση του Δ είναι:

$$P(B/\Delta)=\frac{P(B\cap\Delta)}{P(\Delta)}=\frac{P(\Delta)}{P(\Delta)}=1\neq P(B)$$

Αντιθέτως γνωρίζοντας ότι το ενδεχόμενο Β={ΚΚ,ΚΓ} έχει πραγματοποιηθεί, η δεσμευμένη πιθανότητα του Α με δεδομένη την πραγματοποίηση του Β είναι:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P\{K\Gamma\}}{1/2}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}=P(A) \text{ ή } P(A/B)=P(A)$$

Από την τελευταία σχέση διαπιστώνουμε ότι η Ρ(Α) δεν επηρεάζεται από την πραγματοποίηση ή μη του ενδεχομένου Β.

Ομοίως $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}=P(B)$ ή Ρ(Β/Α)=Ρ(Β).

Τέτοια ενδεχόμενα όπως τα Α και Β για τα οποία η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου, ονομάζονται **ανεξάρτητα ενδεχόμενα**. Δηλαδή, αν δύο ενδεχόμενα είναι **ανεξάρτητα**, τότε ισχύει:

Ρ(Α/Β)=Ρ(Α) ή Ρ(Β/Α)=Ρ(Β) με Ρ(Β)>0 και Ρ(Α)>0

Λαμβάνοντας υπόψιν τον πολλαπλασιαστικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε :

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)=P(B)\cdot P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4} \text{ ή}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

δηλαδή $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Γενικά :

Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα Α και Β είναι **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$$

Δύο ενδεχόμενα που δεν είναι ανεξάρτητα λέγονται **εξαρτημένα**.

Τρία ενδεχόμενα Α, Β, Γ είναι **ανεξάρτητα**, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)},\ \boxed{P(A\cap\Gamma)=P(A)\cdot P(\Gamma)},\ \boxed{P(B\cap\Gamma)=P(B)\cdot P(\Gamma)}$$

και $\boxed{P(A\cap B\cap\Gamma)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)}$

Γενικεύοντας, ο παραπάνω ορισμός μπορεί να επεκταθεί για περισσότερα από τρία ενδεχόμενα.

Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, $(\nu \geq 2)$ είναι ανεξάρτητα, όταν για οποιαδήποτε κ από αυτά ισχύει: $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\kappa) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_\kappa)$ με $\kappa \leq \nu$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

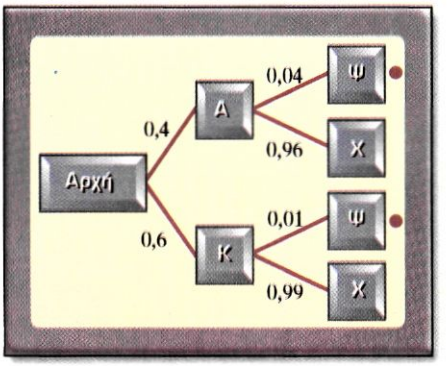
1. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι. Δίνονται τα ενδεχόμενα :
Α : "Εμφανίζεται ένδειξη μεγαλύτερη ή ίση του 2"
Β : "Εμφανίζεται ακριβώς ένδειξη 5"
Υπολογίστε την πιθανότητα P(B/A).

Απάντηση
Οι δυνατές περιπτώσεις του πειράματος είναι 6. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις του Α είναι 5 (ένδειξη 2 ή 3 ή 4 ή 5 ή 6) και του Β είναι 1, οπότε :
P(A) = 5/6 και P(B) = 1/6
Είναι φανερό ότι P(A/B) = 1
Επομένως έχουμε :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 1}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$$

2. Σε ένα λύκειο το 4% των αγοριών και το 1% των κοριτσιών είναι ψηλότερα από 1,85 m. Το 60% των μαθητών είναι κορίτσια. Ένας μαθητής επιλέγεται τυχαία. Να βρεθεί η πιθανότητα :
α) Να είναι ψηλότερος από 1,85 m
β) Αν είναι ψηλότερος από 1,85 m να είναι αγόρι

Απάντηση
Θεωρούμε τα ενδεχόμενα :
Α : "Αγόρι"
Κ : "Κορίτσι"
Ψ : "Μαθητής ψηλότερος από 1,85 m"
Χ : "Μαθητής χαμηλότερος από 1,85 m"
Στο παρακάτω δενδροδιάγραμμα περιγράφονται οι 2 φάσεις της διαδικασίας και δίνονται οι πιθανότητες κάθε κλάδου.



Πιθανότητα

- $0{,}4 \cdot 0{,}04 = 0{,}016$

  $0{,}4 \cdot 0{,}96 = 0{,}384$

- $0{,}6 \cdot 0{,}01 = 0{,}006$

  $0{,}6 \cdot 0{,}99 = 0{,}594$

α) Όπως βλέπουμε υπάρχουν «2 διαδρομές» που οδηγούν σε μαθητή ψηλότερο από 1,85 m. Στο σχήμα οι διαδρομές αυτές σημειώνονται με τελεία. Η πιθανότητα των ενδεχομένων Ψ είναι:

$$P(\Psi) = P(A)\cdot P(\Psi/A) + P(K)\cdot P(\Psi/K) = 0{,}4\cdot 0{,}04 + 0{,}6 \cdot 0{,}01 = 0{,}022$$

β) Η πιθανότητα που ζητείται είναι:

$$P(A/\Psi) = \frac{P(A\cap\Psi)}{P(\Psi)} = \frac{P(A)\cdot P(\Psi/A)}{P(\Psi)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}04}{0{,}022} = \frac{0{,}016}{0{,}022} = 0{,}727 \text{ ή } 72{,}7\%$$

3. Αν Α και Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε τα παρακάτω ζεύγη είναι ζεύγη ανεξαρτήτων ενδεχομένων.

α) Α και Β΄

β) Α΄ και Β

γ) Α΄ και Β΄

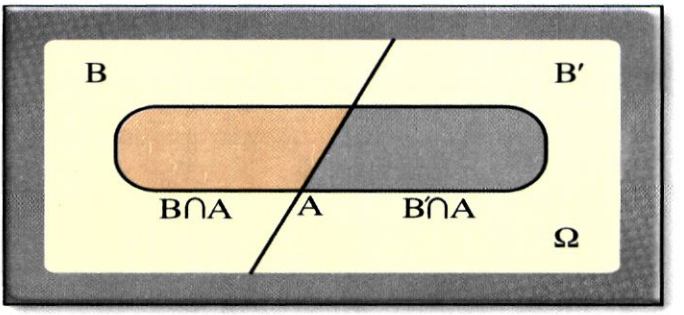
Απάντηση :

α) Έστω P(A)>0, οπότε έχουμε:

$$P(B/A) + P(B'/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} + \frac{P(B'\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B\cap A) + P(B'\cap A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P[(B\cap A)\cup(B'\cap A)]}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Επομένως P(B΄/A)=1-P(B/A). Έτσι:

$$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B'/A) = P(A) \cdot [1 - P(B/A)] =$$
$$P(A) - P(A) \cdot P(B/A) = P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$P(A) \cdot [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B')$$

και συνεπώς τα ενδεχόμενα A και B΄ είναι ανεξάρτητα. Κατά ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται οι β) και γ).

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. **Βασική αρχή της απαρίθμησης**

Αν ένα πείραμα μπορεί να χωρισθεί σε ν φάσεις, έτσι ώστε η πρώτη φάση να μπορεί να εκτελεσθεί με κ_1 τρόπους, η 2η με κ_2 τρόπους ..... η ν-οστή με κ_ν τρόπους, το πείραμα μπορεί να εκτελεστεί με $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \ldots \cdot \kappa_\nu$ διαφορετικούς τρόπους.

2. **Διατάξεις – Μεταθέσεις – Συνδυασμοί**

Το πλήθος αυτών είναι αντίστοιχα :

$$\boxed{\Delta_\mu^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}} \qquad \boxed{M_\nu = \nu!} \qquad \boxed{\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}}$$

3. **Ορισμός πιθανότητας**

• Αν κ ο αριθμός εμφάνισης του ενδεχομένου Α στις ν επαναλαμβανόμενες δοκιμές, τότε :

$$\boxed{P(A) = \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\kappa}{\nu}}$$

• Αν ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα, απλά ενδεχόμενα, τότε :

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}}$$

4. **Πιθανότητα της ένωσης** δύο ενδεχομένων Α, Β

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Αν Α, Β είναι ασυμβίβαστα, τότε :

$$\boxed{P(A \cap B) = 0} \quad \text{και} \quad \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

5. Αν **$A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$**

6. **Για δύο συμπληρωματικά** ενδεχόμενα Α, Α΄ ισχύει :

$$P(A) + P(A') = 1$$

7. **Δεσμευμένη πιθανότητα** ενός ενδεχόμενου :

$$\boxed{P(B/A) = P(A \cap B)/P(A)} \quad \text{και} \quad \boxed{P(A/B) = P(A \cap B)/P(B)}$$

οπότε $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B/A)}$ ή $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A/B)}$ που αποτελεί τον Πολλαπλασιαστικό νόμο της πιθανότητας

8. **Ανεξάρτητα ενδεχόμενα**: Δύο ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα αν

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

και γενικώς τα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ είναι ανεξάρτητα όταν :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\kappa) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_\kappa)} \text{ για κάθε } \boxed{\kappa \leq \nu}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Το σύνολο όλων των εξαγομένων ενός πειράματος ονομάζεται :
   α. Δειγματικός χώρος β. Τομή ενδεχομένων γ. Δεσμευμένη πιθανότητα

2. Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι πάντοτε :
   α. Μικρότερη από το μηδέν β. Στο διάστημα μεταξύ 0 και 1
   γ. Μεγαλύτερη από το 1
3. Δύο ισοπίθανα ενδεχόμενα
   α. Δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως
   β. Έχουν την ίδια πιθανότητα πραγματοποίησης
   γ. Η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του άλλου.
4. Η δεσμευμένη πιθανότητα δύο ασυμβίβαστων ενδεχομένων είναι πάντοτε :
   α. 1, 0 β. Μεταξύ 0 και 1 γ. 0

5. Δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα είναι :
   α. Πάντοτε ασυμβίβαστα β. Ποτέ ασυμβίβαστα
   γ. Πάντοτε συμπληρωματικά
6. Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cap B) =$
   α. 1 β. 0 γ. P(A)+P(B) δ. P(A)·P(B)
7. Τα ποτά που προμηθεύτηκε κάποιος για τη συγκέντρωση που θα έκανε ήταν :
   12 μπύρες μάρκας Α
   24 μπύρες μάρκας Β
   24 μπύρες μάρκας Γ
   12 μπύρες μάρκας Δ
   2 μπύρες μάρκας Ε και
   6 αναψυκτικά

   Α) Η πιθανότητα να είναι μπύρα το πρώτο ποτό που σερβίρεται είναι :
   α. 0,9250 β. 0,9000 γ. 0,9487 δ. 0,7800

   Β) Η πιθανότητα να είναι μπύρα Α το πρώτο ποτό που σερβίρεται είναι :
   α. 0,0750 β. 0,1500 γ. 0,3000 δ. 0,1622

   Γ) Η πιθανότητα να είναι τα 3 πρώτα ποτά αναψυκτικά είναι :
   α. 0,00042 β. 0,00024 γ. 0,1875 δ. 0,2250

8. Οι τρόποι με τους οποίους 3 μαθητές μπορούν να εξεταστούν σε πέντε μαθήματα είναι:
α. 125 β. 60 γ. 10 δ. 100

9. Σε ένα τηλεπαιχνίδι λαμβάνουν μέρος 10 παίκτες. Οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να συμπληρωθούν οι 3 πρώτες θέσεις είναι :
α. 120 β. 1000 γ. 150 δ. 720

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΔΑ Α

1. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α και Β με :
$P(A \cup B) = 3/4$, $P(A') = 2/3$ και
$P(A \cap B) = 1/4$
Βρείτε τις πιθανότητες :
α) $P(A)$
β) $P(B)$
γ) $P(A \cap B')$

2. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ισχύουν: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$ και $P(A/B) = 4/5$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες :
$P(A')$, $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$

3. Η πιθανότητα να ζει ένας άνδρας μετά από 10 χρόνια είναι 1/4, ενώ η πιθανότητα να ζει η γυναίκα του μετά από 10 χρόνια είναι 1/3.
Βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων μετά από 10 χρόνια :
α) Να ζουν και οι δύο
β) Να ζει ένας τουλάχιστον από τους δύο
γ) Να μη ζουν και οι δύο
δ) Να ζει μόνο η σύζυγος

4. Από τους πέντε παίχτες μιας ομάδας μπάσκετ ο πλεϊμέικερ είναι γεννημένος στις 28 Ιανουαρίου. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων :
α) Ένας τουλάχιστον συμπαίχτης να έχει γενέθλια την ίδια ημέρα
β) Δύο τουλάχιστον παίχτες της ομάδας να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα

5. Το νούμερο του κλεμμένου αυτοκινήτου μου ήταν: ΥΙΤ 8870. Σκέπτομαι να αγοράσω ένα καινούργιο αυτοκίνητο. Υποθέτοντας ότι η νέα πινακίδα θα έχει τετραψήφιο αριθμό, υπολογίστε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
   α) Τα ψηφία στη νέα πινακίδα είναι 8, 8, 7, 0 με αυτή τη σειρά
   β) Τα ψηφία είναι 8, 8, 7, 0 αλλά σε οποιαδήποτε σειρά
   γ) Η νέα πινακίδα να μην έχει κανένα από τα ψηφία 8, 7, 0
   δ) Η νέα πινακίδα να μοιάζει με την παλιά μόνο στο πρώτο ψηφίο
   ε) Η νέα πινακίδα να μοιάζει με την παλιά σε ένα μόνο ψηφίο

ΟΜΑΔΑ Β

1. Μια εταιρία έχει 500 εργαζομένους. Από αυτούς 300 είναι άνδρες και 280 είναι μέλη του συνδικάτου. Από τους 300 άνδρες, 190 είναι μέλη του συνδικάτου.
   α) Είναι τα ενδεχόμενα «άνδρας» και «μέλος του συνδικάτου» ανεξάρτητα; Είναι ασυμβίβαστα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
   β) Αν ένας εργαζόμενος της εταιρίας λαμβάνεται τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα ότι αυτός είναι:
      α) Γυναίκα
      β) Άνδρας με δεδομένο ότι είναι μέλος του συνδικάτου
      γ) Άνδρας ή μέλος του συνδικάτου
   γ) Αν δύο εργαζόμενοι επιλέγονται τυχαία από την εταιρία, ποια είναι η πιθανότητα να είναι και οι δύο μέλη του συνδικάτου ;

2. Τα αποτελέσματα έρευνας για τη σχέση μητρότητας και εργασιακής απασχόλησης της μητέρας που στηρίχθηκαν σε δείγμα 500 γυναικών ηλικίας 24-60 χρονών δίνονται στον πίνακα.

Εργασιακή απασχόληση μητέρας \ Ηλικία παιδιών	Κάτω των 6 χρονών	6 έως 18 χρονών	Μη ύπαρξη παιδιών
Πλήρης απασχόληση	30	95	105
Μερική απασχόληση	60	50	25
Μη εργαζόμενη	50	55	30

α) Αν μια γυναίκα λαμβάνεται τυχαία, βρείτε την πιθανότητα η γυναίκα αυτή:
   i) Να εργάζεται σε πλήρη απασχόληση.
   ii) Να εργάζεται με μερική απασχόληση με δεδομένο ότι έχει παιδιά ηλικίας από 6 μέχρι 18 χρόνων.
   iii) Να μην εργάζεται με πλήρη απασχόληση
   iv) Να εργάζεται με πλήρη απασχόληση ή έχει παιδιά κάτω των 6 χρονών

β) Είναι τα ενδεχόμενα «εργάζεται με μερική απασχόληση» και «έχει παιδιά κάτω των 6 χρόνων» ανεξάρτητα; Είναι ασυμβίβαστα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. Από τους 60 μαθητές της Γ'τάξης ενός λυκείου επιλέγουν: Στατιστική 27, Πληροφορική 20 και 22 κανένα από αυτά τα δύο. Ένας μαθητής επιλέγεται τυχαία.
   i) Βρείτε την πιθανότητα να έχει επιλέξει και τα δύο Στατιστική και Πληροφορική.
   ii) Δεδομένου ότι έχει επιλέξει Στατιστική, βρείτε την πιθανότητα να μην έχει επιλέξει Πληροφορική. Προσδιορίστε αν το ενδεχόμενο «επιλέγει Στατιστική» είναι ανεξάρτητο του ενδεχομένου «δεν επιλέγει Πληροφορική».

4. Η πιθανότητα ένας ασφαλιστής να συνάψει ένα συμβόλαιο σε κάθε επαφή του με πελάτη είναι 0,4. Πόσους πελάτες πρέπει να επισκεφθεί για να συνάψει ένα τουλάχιστον συμβόλαιο με πιθανότητα μεγαλύτερη του 95%, αν υποθέσουμε ότι η σύναψη συμβολαίου με ένα πελάτη δεν επηρεάζει την απόφαση του επόμενου πελάτη να συνάψει ή όχι συμβόλαιο.

5. Ένα διαγνωστικό τεστ χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό μιας συγκεκριμένης ασθένειας, η οποία είναι γνωστό ότι προσβάλλει το 3% του πληθυσμού. Όταν εφαρμόζεται σε ένα άτομο που πάσχει από την ασθένεια δίνει θετικό αποτέλεσμα με πιθανότητα 0,95. Όταν εφαρμόζεται σε υγεία δίνει θετικό αποτέλεσμα με πιθανότητα 0,01. Το τεστ εφαρμόζεται σε ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο του πληθυσμού.
   α) Υπολογίστε την πιθανότητα να έχουμε θετικό αποτέλεσμα.
   β) Με δεδομένο ότι έχουμε θετικό αποτέλεσμα από το τεστ, βρείτε την πιθανότητα το άτομο να έχει την ασθένεια.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Ποια είναι η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγόμενος μαθητής στην τάξη να :

   α) Έχει επιλέξει θετική κατεύθυνση
   β) Έχει επιλέξει θεωρητική κατεύθυνση
   γ) Έχει επιλέξει τεχνολογική κατεύθυνση
   δ) Είναι αριστούχος
   ε) Είναι αριστερόχειρας
   στ) Είναι δεξιόχειρας
   ζ) Πηγαίνει φροντιστήριο σε όλα τα μαθήματα
   η) Πηγαίνει φροντιστήριο μόνο στα μαθήματα κατεύθυνσης
   θ) Μην πηγαίνει φροντιστήριο
   ι) Έχει επιλέξει θετική κατεύθυνση και να μην πηγαίνει φροντιστήριο
   κ) Να έχει επιλέξει τεχνολογική κατεύθυνση ή να είναι αριστερόχειρας. Είναι τα παραπάνω ενδεχόμενα «επιλέγει τεχνολογική κατεύθυνση» και «είναι αριστερόχειρας» ανεξάρτητα; Είναι ασυμβίβαστα; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
   λ) Να πηγαίνει φροντιστήριο μόνο στα μαθήματα κατεύθυνσης με δεδομένο ότι έχει επιλέξει θετική κατεύθυνση.

2. Πηγαίνετε στο κυλικείο του σχολείου σας κατά το χρόνο των διαλειμμάτων μιας ημέρας και καταγράψτε τι αγόρασε ο κάθε μαθητής και πόσα πλήρωσε.

   α) Ποιο ποσοστό των μαθητών ξόδεψε 300 δραχμές ή περισσότερα;
   β) Βασιζόμενοι στην απάντησή σας στο ερώτημα (α), ποια είναι η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγόμενος μαθητής να ξόδεψε 300 ή περισσότερες δραχμές;
   γ) Επαναλάβετε το πρόβλημα σε μία διαφορετική ημέρα και δείτε αν υπάρχει σημαντική διαφορά στις απαντήσεις των ερωτήσεων (α) και (β).
   δ) Παρουσιάστε σε ένα πίνακα τα αποτελέσματα της έρευνάς σας (τα είδη που αγόρασε ο κάθε μαθητής, καθώς και τα χρήματα που δαπάνησε).