Παρεμβολή ή παλινδρόμηση;

Εισαγωγή

Ο John W. Tukey, διακεκριμένος Στατιστικός [Brillinger 2002], χημικός, τοπολόγος, ερευνητής και αναλυτής δεδομένων, αναφέρει το 1962:

> *Κατά τη γνώμη μου η Στατιστική είναι μία επιστήμη και δεν αποτελεί πλέον κλάδο των Μαθηματικών, όπως η Φυσική, η Χημεία και τα Οικονομικά· διότι οι μέθοδοί τους χρησιμοποιούν την εμπειρία και όχι τη λογική.*

Παρόμοιες απόψεις ακούγονται κατά καιρούς από αρκετούς έγκριτους επιστήμονες και αναμφίβολα δεν μπορούν να παραλειφθούν.

Η Στατιστική διακρίνεται από μία φιλοσοφία μάθησης και δράσεις σύμφωνα με κάποιες βασικές αρχές:

- όλη η διαδικασία αποτελεί ένα σύστημα διεργασιών που συνδέονται,
- Η διακύμανση υπάρχει σε όλες τις διαδικασίες,
- η κατανόηση της διακύμανσης και οι τρόποι που θα χρησιμοποιηθούν για να ελαχιστοποιηθεί είναι τα κύρια κλειδιά της επιτυχίας.

Τα κλασικά Μαθηματικά χρησιμοποιούν έναν ντετερμινιστικό τρόπο σκέψης και κατ' αυτόν τον τρόπο κατευθύνονται και οι μαθητές στα αντίστοιχα μαθήματα. Μέσω των Μαθηματικών της Στατιστικής συγκροτείται ένας στοχαστικός τρόπος σκέψης, δηλαδή λειτουργεί επαγωγικά, από το ειδικό στο γενικό, ενώ τα κλασσικά Μαθηματικά έχουν συμπερασματικό τρόπο λειτουργίας, από το γενικό στο ειδικό και σε κάποιες μόνο περιπτώσεις όπως στη Μαθηματική επαγωγή, επαγωγικά. Απλά αυτό που πρέπει να γίνει είναι να συμπεριληφθούν στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης όλες οι κατηγορίες Μαθηματικών σε ευρεία κλίμακα, όσο γίνεται, με μία γενναία αύξηση των ωρών διδασκαλίας του μαθήματος. Άλγεβρα – υπό την καθαρή της σκοπιά (καταρχάς χωρίς συναρτήσεις, με πίνακες και μιγαδικούς, γραμμική άλγεβρα και θεωρία αριθμών) –, Ανάλυση (μελέτη ιδιοτήτων συναρτήσεων) –, Γεωμετρία (Ευκλείδεια με στερεομετρία και μη ευκλείδειες με εφαρμογές), Διακριτά Μαθηματικά με αλγοριθμική προσέγγιση –, Πιθανότητες και Στατιστική με εφαρμοσμένο χαρακτήρα και χρήση λογισμικού και τέλος εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα με μετρήσεις, προσεγγίσεις, εκτιμήσεις και σφάλματα[1]! Αντίθετα, η πορεία που έχουν ακολουθήσει τα σχολικά « προγράμ-

---

1 Σε ένα παρόμοιο πλαίσιο κινείται και η πιο οργανωμένη δημόσια συζήτηση που έχει γίνει έως τώρα τα τελευταία χρόνια για τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών του Λυκείου, στο Ε.Μ.Π. το 2009.

ματα σπουδών » της τελευταίας 20ετίας είναι να αφαιρούνται χωρίς προγραμματισμό ενότητες της ύλης, συνήθως δε εκείνες που έχουν κάποιες εφαρμογές: πίνακες, ακολουθίες, ανατοκισμός, αθροίσματα όρων, νόμος εκθετικής μεταβολής, όγκοι, στερεομετρία, όγκοι με ολοκληρώματα και τόσες άλλες πολλές εφαρμογές[2]. Βέβαια, υπάρχουν συγκεκριμένες ομάδες «Μαθηματικών» που είναι υπεύθυνοι γι' αυτό, αλλά δεν αποτελεί αντικείμενο του παρόντος.

Η παρουσίαση αυτή στοχεύει να παρουσιάσει δύο χρήσιμες Μαθηματικές ιδέες ως παράδειγμα σχετικό με δύο διαφορετικές ωφελιμιστικές όψεις. Αφενός, πώς όμορφα Μαθηματικά προβλήματα μπορούν να γίνουν αφορμή για να αποκτήσουν εμπειρία για τη χρήση και την εφαρμογή των Μαθηματικών στις επιστήμες και την καθημερινή ζωή, αφετέρου πώς η συνεργασία σε εκτός αναλυτικού προγράμματος επιστημονικά θέματα - μέσω και των συνεργασιών των ομίλων των Π.Π.Σ. - μπορεί να δώσει χρήσιμες αφορμές για την κατασκευή μίας σφαιρικότερης εικόνας της μαθηματικής γνώσης και των εφαρμογών της.

---

2 Υπάρχουν συγκεκριμένες οδηγίες και μελέτες που υποστηρίζουν τέτοια ευρεία έκθεση των μαθητών σε Μαθηματικά, όπως το *Principles and Standards for School Mathematics* [NCTM 2000], ή αντίστοιχη έκθεση του Πολυτεχνείου σε ημερίδα που είχε γίνει το 2009, καθώς και μεμονωμένες απόψεις Μαθηματικών. Δυστυχώς, οι υπόλοιποι αρμόδιοι φορείς, υποθέτω, είτε δεν έχουν την ικανότητα να προσεγγίσουν την κατάσταση, είτε δε θέλουν. Έτσι, καμία επίσημη σχετική έρευνα δεν έχει υπάρξει τα τελευταία χρόνια στην Ελλάδα, ούτε και αξιολόγηση των προγραμμάτων σπουδών φυσικά, ώστε να γίνει και αλλαγή τους με κάποιο στόχο.

Το πρόβλημα στο εργαστήριο

Προσδιορισμός της περιεκτικότητας της μπλε χρωστικής Brilliant Blue σε ποτά του εμπορίου

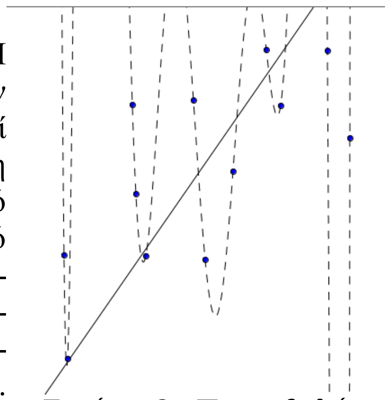
Πίνακας μετρήσεων

α/α διαλύματος	V_{mL} προτύπου διαλύματος	V_{mL} H_2O	C_M	% T	A
1	10	0			
2	8	2			
3	6	4			
4	4	6			
5	2	8			

Εικόνα 1: Πίνακας μετρήσεων του φύλλου εργασίας του ομίλου Χημείας.

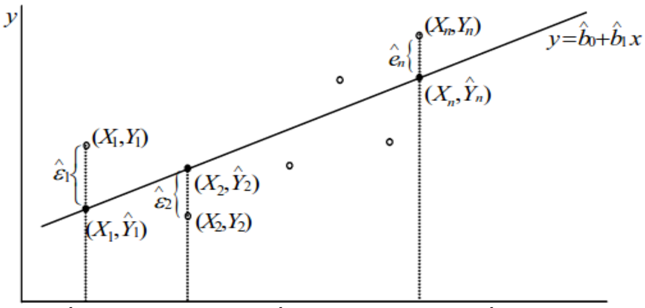
Οι μαθητές στον όμιλο Χημείας έφτιαξαν 5 διαφορετικά πρότυπα διαλύματα μίας χρωστικής με γνωστή συγκέντρωση και μέτρησαν με φασματομετρικό όργανο την απορρόφηση καθενός από αυτά. Στην πραγματικότητα το μοντέλο που διέπει τη σχέση μεταξύ συγκέντρωσης και απορρόφησης είναι γνωστό στον ερευνητή ότι είναι γραμμικό. Έτσι, οι μαθητές βρήκαν πειραματικά την απορρόφηση A του διαλύματος και στη συνέχεια προσδιόρισαν γραφικά τη συγκέντρωσή του. Στη συνέχεια, οι μαθητές έκαναν τη χάραξη της «βέλτιστης» ευθείας, κατ' οπτική παρατήρηση, η οποία προσαρμόστηκε καλύτερα στα δεδομένα τους, δηλαδή τους ζητήθηκε να έχει όσο το δυνατόν μικρότερη απόκλιση στη συσχέτιση συγκέντρωσης – απορροφητικότητας. Έπειτα τους δόθηκε έτοιμη με χρήση λογισμικού η ευθεία παλινδρόμησης, η οποία φυσικά σε κάποιες περιπτώσεις εκτιμήσεων των μαθητών απείχε πολύ. Οι μαθητές, φυσιολογικά, ζήτησαν να κατανοήσουν πώς λειτουργεί η συγκεκριμένη μέθοδος και η συνέχεια δόθηκε στον όμιλο Μαθηματικών, όπου προσδιορίστηκε η ευθεία παλινδρόμησης με έναν μεικτό τρόπο όπως περιγράφεται παρακάτω, με χρήση λογισμικού Geogebra και οπτικής παρατήρησης ελαχιστοποίησης του αθροίσματος των τετραγώνων των αποκλίσεων.

Παρεμβολή ή παλινδρόμηση;Η πρώτη βασική ερώτηση των μαθητών στον όμιλο Μαθηματικών ήταν γιατί να μην επιλεχθεί μία καμπύλη, η οποία να διέρχεται με ακρίβεια από όλα τα σημεία που προέκυψαν από τα πειραματικά δεδομένα, οπότε συμπερασματικά θα δίνει και ακριβέστερα τη σχέση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. Δοθέντος ενός συνόλου δεδομένων – ως απλή περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύνολο σημείων σε ένα καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων και στη συνέχεια να γενικεύσουμε αλγεβρικά – ζητείται να σχεδιαστεί μία καμπύλη, η οποία να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα τα σημεία – δεδομένα αυτά. Διαφορετικές ανάγκες και οπτικές μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικές μεθόδους και αποτελέσματα. Αν ο ενδιαφερόμενος επιθυμεί μία καμπύλη, η οποία να διέρχεται από όλα τα σημεία, τότε θα ανατρέξει φυσιολογικά σε μία μέθοδο παρεμβολής από τις πολυάριθμες που εμφανίζονται στη βιβλιογραφία και κάποιες περιγράφονται παρακάτω όπως παρουσιάστηκαν στον όμιλο Μαθηματικών. Αν από την άλλη πλευρά η οπτική του είναι να περιγράψει έναν απλό ποσοτικό νόμο, μέσω του οποίου να συσχετίζονται τα δεδομένα, υπό την οπτική του πώς επηρεάζεται η εξαρτημένη μεταβλητή από τις μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε θα λάβει υπόψη του το δείγμα και την υπάρχουσα ερευνητική γνώση για τη συμπεριφορά του. Για παράδειγμα μπορεί η μεταβολή του ενός μετρούμενου μεγέθους – ανεξάρτητης μεταβλητής – να προκαλεί ανάλογη μεταβολή στο άλλο μέγεθος – εξαρτημένη μεταβλητή -, οπότε αναζητείται ένα γραμμικό μοντέλο, δηλαδή μία ευθεία που να περιγράφει το νόμο που διέπει τις μεταβολές σε αυτά τα δεδομένα. Η ιδέα είναι να επιλεγεί μία καμπύλη – στη συγκεκριμένη περίπτωση ευθεία - η οποία να «ταιριάξει» όσο το δυνατόν καλύτερα στα συγκεκριμένα δεδομένα. Αν για παράδειγμα, όπως στην περίπτωσή μας, πρόκειται για ένα πείραμα Χημείας, στο οποίο έχουν γίνει κάποιες μετρήσεις πειραματικά, στόχος είναι να βρεθεί μία όσο το δυνατόν καλύτερη ευθεία που να περιγράφει τη σχέση μεταξύ των δεδομένων. Η ευ-



Εικόνα 2: Παρεμβολή πολυωνύμου στα δεδομένα(διακεκομμένη γραμμή) και παλινδρόμηση ευθείας στα δεδομένα.

θεία επιλέγεται ως μοντέλο, διότι ο ερευνητής γνωρίζει ότι οι συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών μεγεθών (απορροφητικότητας και συγκέντρωσης) είναι συνήθως γραμμικές. Σε άλλες περιπτώσεις μπορεί η σχέσεις να είναι τετραγωνικές, οπότε αναζητείται κάποια παραβολή ή και λογαριθμικές οπότε αναζητείται κάποια ανάλογα προσαρμόσιμη καμπύλη. Εξάλλου, οι μετρήσεις σε ένα πείραμα δεν μπορούν ούτως ή άλλως να είναι ακριβής, εξαιτίας και των σφαλμάτων.



Εικόνα 3: Παλινδρόμηση σε δεδομένα και σφάλματα (Μπούτσικας)

Πειραματικό σφάλμα

Ας υποθέσουμε ότι διεξάγουμε ένα πείραμα χημείας. Είναι δεδομένο ότι όσο καλά και να είναι τα όργανα μέτρησης και όσο έμπειρος και προσεκτικός ο ερευνητής δεν είναι δυνατό στις περισσότερες μετρήσεις να ληφθεί η αληθινή τιμή του μετρούμενου (πχ ποσότητας, συγκέντρωσης, μεγέθους κλπ). Αν όμως ακολουθηθούν συγκεκριμένα στατιστικά μοντέλα και ανάλυση των δεδομένων που προέκυψαν από τις μετρήσεις είναι δυνατόν να έχουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης, όσο πιο κοντά γίνεται στην αληθινή τιμή. Μέσω ακριβώς της μέτρησης και αυτού του διαστήματος εμπιστοσύνης μπορούμε να οδηγηθούμε σε σχετικά ακριβή αποτελέσματα με όσο το δυνατόν μικρότερο εύρος λάθους. Εξάλλου, οι περισσότερες διαδικασίες ανέχονται μικρό περιθώριο λάθους, διαφορετικά πολύ απλά δεν είναι αποτελεσματικές και είτε δε χρησιμοποιούνται, είτε αντικαθίστανται το συντομότερο δυνατό.

Μέθοδος της προσαρμογής ή παλινδρόμησης (regression)

Η Στατιστική οπτική λοιπόν ενδιαφέρεται για την επίδραση μίας μεταβλητής (ανεξάρτητη μεταβλητή) σε μία άλλη (εξαρτημένη μεταβλητή), όταν μεταβάλλεται η πρώτη. Η εύρεση μίας συναρτησιακής σχέσης που να τις συνδέει είναι θεμελιώδης και αναζητείται με διάφορες μεθόδους. Η διαδικασία που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών, ώστε να γίνει πρόβλεψη της επίδρασης των μεταβολών κάποιων από αυτές στις άλλες λέγεται **ανάλυση παλινδρόμησης (regression analysis)**, ορολογία που χρη-

σιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Γάλλο ανθρωπολόγο Galton το 1885 (Αδαμόπουλος κ.ά.). Μία μέθοδος προσδιορισμού αυτής της σχέσης είναι η **μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων**. Οφείλεται στους Gauss και Legendre και πρωτοπαρουσιάστηκε στις αρχές του 19ου αιώνα, ως αποτέλεσμα ερμηνείας της θεωρίας σφαλμάτων (Κάκουλλος 1972). Η βασική αρχή της είναι ότι ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων. Στην παρακάτω εικόνα διακρίνουμε τα σχετιζόμενα μεγέθη, ως τελείες με λευκό εσωτερικό. Μία υποτιθέμενη γραμμική σχέση απεικονίζεται ως μία ευθεία, την οποία θέλουμε να προσαρμόσουμε στα δεδομένα μας. Η έννοια της προσαρμογής, στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, συνίσταται στην ελαχιστοποίηση των τετραγώνων των αποκλίσεων $\hat{e}_n$ των κάθετων αποστάσεων των σημείων των δεδομένων από την υποτιθέμενη ευθεία.
Θεωρούμε λοιπόν ότι η ζητούμενη συνάρτηση προσαρμογής είναι μία ευθεία $(\varepsilon): y=ax+b$. Αν (x_i, y_i) είναι τα ζεύγη των πειραματικών μας δεδομένων, τότε η ευθεία (ε) θα δίνει μία θεωρητική πρόβλεψη $y(x_i)$ η οποία θα έχει κάποια απόκλιση από τα δεδομένα: $dy_i = y_i - y(x_i)$. Αν λοιπόν διαθέτουμε n πλήθος μετρήσεων – πειραματικών ζευγών δεδομένων, τότε το άθροισμα όλων των αποκλίσεων είναι $dy_1^2 + dy_2^2 + \dots dy_n^2$. Εδώ έχουμε θεωρήσει το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων, διότι προφανώς χωρίς το τετράγωνο οι αποκλίσεις θα αλληλοαναιρούνταν (άλλοτε θετικές, άλλοτε αρνητικές), οπότε δε θα είχαμε καλή εικόνα για την πραγματική απόκλιση. Πρόκειται, ουσιαστικά για τον ίδιο λόγο για το οποίο επιλέγουμε στον υπολογισμό της διασποράς σε κάποια δεδομένα να βρίσκουμε την μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων από τη μέση τιμή. Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσαμε λοιπόν να μετράμε και το άθροισμα των απόλυτων αποκλίσεων $|dy_1| + |dy_2| + \dots + |dy_n|$ και σε κάποιες περιπτώσεις πράγματι χρησιμοποιείται και αυτή η μέθοδος για την προσαρμογή της καταλληλότερης ευθείας.
Οπότε, στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα: $S = dy_1^2 + dy_2^2 + \dots + dy_n^2 = \sum_{i=1}^{n} dy_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$.
Σε αυτήν τη σχέση οι παράμετροι είναι a, b αυτές που μεταβάλλονται και ουσιαστικά θέλουμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη τιμή ενός αθροίσματος τετραγώνων. Οι βέλτιστες ειδικές τιμές των παραμέτρων a, b που αναζητούμε λέγονται **εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων** και ορίζουν την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, ας τις συμβολίζουμε παρακάτω με $\hat{a}, \hat{b}$.
Οπότε το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε είναι η ελαχιστοποίηση μίας

συνάρτησης δύο μεταβλητών a, b την $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a x_i-b)^2$.
Για την επίλυση θα χρησιμοποιήσουμε γνωστή θεωρία μεγίστων – ελαχίστων από τον απειροστικό λογισμό. Συγκεκριμένα, στη θέση ελαχίστου θα μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς τις μεταβλητές a, b του προβλήματος. Δηλαδή θα ισχύουν:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial b}=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} -2(y_i-b-ax_i)=0 \, \kappa\alpha\iota \sum_{i=1}^{n} -2x_i(y_i-b-ax_i)=0 \Leftrightarrow$$

$$-\sum_{i=1}^{n} 2y_i+\sum_{i=1}^{n} b+\sum_{i=1}^{n} ax_i=0 \, \kappa\alpha\iota -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i+2\sum_{i=1}^{n} b+2a x_i^2=0 \Leftrightarrow$$

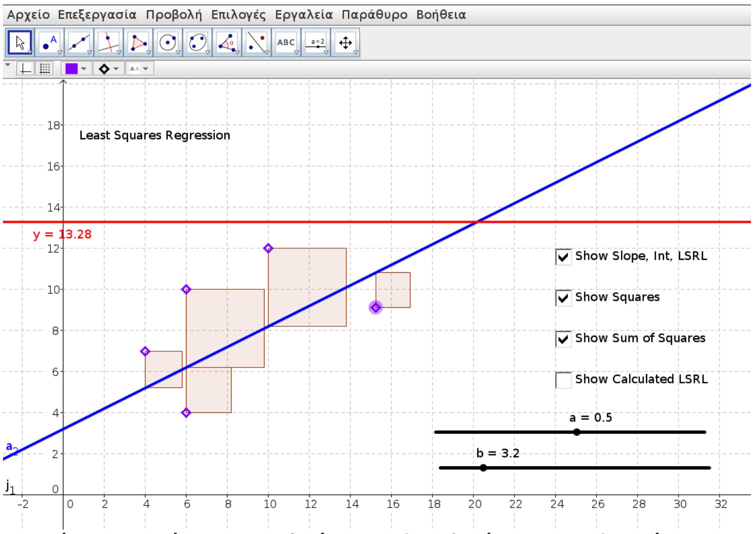
$$\sum_{i=1}^{n} y_i=nb+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a \, \kappa\alpha\iota \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι τιμές x_i, y_i είναι γνωστές, οι δοσμένες πειραματικές τιμές που προσδιορίστηκαν, οπότε μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του παραπάνω συστήματος και στην εύρεση των κατάλληλων τιμών των μεταβλητών a, b οι οποίες θα δώσουν την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, τις εκτιμήτριες όπως τις ονομάσαμε:

$$\hat{b}=\frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right)-\left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}$$

$$\hat{a}=\frac{n\left(\sum x_i y_i\right)-\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\left(\sum x_i^2\right)-\left(\sum x_i\right)^2} \kappa\alpha\iota$$

Προφανώς, οι υπολογισμοί που απαιτούνται για την παραπάνω διαδικασία δε χρειάζεται να γίνουν από μαθητές όταν αυτοί θέλουν να βρουν τις εκτιμήτριες για την ευθεία παλινδρόμησης. Υπάρχουν λογισμικά που υποστηρίζουν αυτήν τη διαδικασία. Για παράδειγμα θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν την αντίστοιχη εντολή στο ανοικτού κώδικα ελεύθερο πρόγραμμα Geogebra.Στην παρακάτω εικόνα, στη μπλε ευθεία ο μαθητής μπορεί να μεταβάλλει την κλίση της μέσω του δρομέα a και το ύψος της μέσω του δρομέα b. Τα πέντε ρομβοειδή σημεία αντιστοιχούν στις παρατηρήσεις που προέκυψαν από τις πειραματικές μετρήσεις. Έχουν επίσης σχηματοποιηθεί και τα τετράγωνα των αποκλίσεων κάθε μίας των παρατηρήσεων από την ευθεία προσαρμογής. Η κόκκινη οριζόντια ευθεία μεταβάλλεται μόνη της στο άθροισμα των τετραγώνων, που είναι το ζητούμενο προς ελαχιστοποίηση. Συνεπώς, ο μαθητής μετακινώντας τους δρομείς a,b μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά και να κατανοήσει τη λειτουργία της μεθόδου εποπτικά, αφήνοντας τους υπολογισμούς για αργότερα. Μπορεί δηλαδή να βρει τις εκτιμήτριες $\hat{a}, \hat{b}$ όπως αυτές προέκυψαν από τους τύπους παραπάνω. Τέλος, υπάρχει και η επιλογή το πρόγραμμα να σχεδιάσει μόνο του την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, ώστε να υπάρξει και ακριβής μέτρηση. Το αρχείο που υλοποιεί την παραπάνω διαδικασία είναι διαθέσιμο στο αποθετήριο του geogebra (Geogebra αποθετήριο). Με την εύρεση της ευθείας παλινδρόμησης μπορεί να γίνει εκτίμηση τιμών για την εξαρτημένη μεταβλητή σε τιμές που δεν υπάρχουν δεδομένα για την ανεξάρτητη μεταβλητή. Απαιτείται όμως προσοχή στις προσαρμογές, διότι, αν οι εκτιμώμενες τιμές βρίσκονται μακρυά από το εύρος των πειραματικών δεδομένων τότε τα αποτελέσματα που θα προκύψουν μπορεί να είναι εντελώς λανθασμένα και ανακριβή.



Εικόνα 4: Εύρεση ευθείας παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων στο πρόγραμμα Geogebra.

Αυτό που συμβαίνει είναι ότι η παραπάνω μέθοδος υπολογισμού των εκτιμητριών $\hat{a}, \hat{b}$ με δεδομένο ότι γνωρίζουμε πως τα δεδομένα μας ακολουθούν γραμμική εξάρτηση, δίνουν εκείνη την ευθεία η οποία έχει τη μέγιστη πιθανότητα να αντιπροσωπεύει αυτό το σύνολο δεδομένων, όταν το σφάλμα στη μέτρηση των y_i ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ανεξάρτητη των x_i. Αυτό απαιτεί όλες οι μετρήσεις να έχουν γίνει με τον ίδιο τρόπο και σε όλο το εύρος των τιμών τις οποίες επιθυμούμε να προσεγγίσουμε. Η ίδια μέθοδος μπορεί να λειτουργήσει και για την εύρεση οποιουδήποτε βαθμού πολυωνυμικής καμπύλης, πχ δευτεροβάθμιας στην περίπτωση που γνωρίζουμε ότι το μοντέλο που ακολουθείται είναι πολυωνυμικό δευτέρου βαθμού για παράδειγμα. Τότε οι εκτιμήτριες θα είναι τρεις $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ και γενικότερα αν ν ο βαθμός του πολυωνύμου προσαρμογής, οι εκτιμήτριες θα είναι ν+1 το πλήθος.

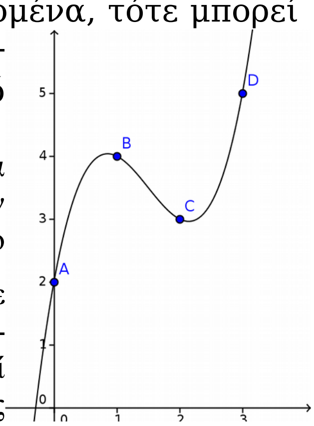
Μέθοδος της παρεμβολής (interpolation)

Η παρεμβολή (interpolation) μεταξύ δεδομένων είναι μία αλγεβρική μέθοδος, στην οποία δεχόμαστε ότι η καμπύλη που αναζητούμε διέρχεται ακριβώς από όλα τα δεδομένα. Δηλαδή, σε αυτή τη μέθοδο το αποδεκτό σφάλμα στα δεδομένα σημεία είναι μηδενικό. Η παρεμβολή είναι πολύ χρήσιμη μέθοδος, διότι η γνώση του τύπου μίας συνάρτησης η οποία να περιγράφει ένα φαινόμενο δεν είναι πάντα εφικτή για όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης αυτής. Δηλαδή για τις πρακτικές εφαρμογές μπορεί να δίνεται ένας πίνακας τιμών ή μία γραφική παράσταση. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι παρεμβολής, καθεμία με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της ως προς τους υπολογισμούς και το πρόβλημα που επιθυμούμε κάθε φορά να λύσουμε. Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο μέθοδοι παρεμβολής, οι οποίες βασίζονται στην εύρεση μίας πολυωνυμικής συνάρτησης, η οποία διέρχεται από τα γνωστά σημεία και λέγεται **συμπτωτικό πολυώνυμο.**

Για παράδειγμα στον παρακάτω πίνακα σημείων ζητείται να παρεμβληθεί ένα πολυώνυμο:

x	0	1	2	3
y	2	4	3	5

Υπάρχει μία απλή μέθοδος πολυωνυμικής παρεμβολής. Συγκεκριμένα, αν $(x_i, y_i), i=1,\ldots,n$ είναι τα δεδομένα, τότε μπορεί πάντα να επιλεχθεί ένα κατάλληλο πολυώνυμο $n-1$ βαθμού που διέρχεται από αυτά τα σημεία.



Οπότε, για τα τέσσερα σημεία του παραπάνω πίνακα χρειάζεται ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Έτσι, αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ και αντικαταστήσουμε τα ζεύγη των παραπάνω τιμών θα προκύψει ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους, το οποίο μπορεί να λύνεται εύκολα, αλλά απαιτεί αρκετές πράξεις στον υπολογιστή. Ταχύτερη είναι η μέθοδος που περιγράφεται στη συνέχεια.

Θεωρούμε το πολυώνυμο 3ου βαθμού:

$$p(x)=a_0+a_1(x-x_1)+a_2(x-x_1)(x-x_2)+a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τις τιμές (x_i, y_i) του πίνακα, λόγω της μορφής του πολυωνύμου προκύπτει ευκολότερο σύστημα προς επίλυση:

$$p(x)=a_0+a_1(x-0)+a_2(x-0)(x-1)+a_3(x-0)(x-1)(x-2)$$

το οποίο γράφεται: $p(x)=a_0+a_1x+a_2x(x-1)+a_3x(x-1)(x-2)$ με το πλεονέκτημα ότι όλοι οι όροι από τον 2ο και μετά μηδενίζονται για $x=x_1$ δηλαδή $x=0$ στη συγκεκριμένη περίπτωση. Οπότε λαμβάνουμε:

$p(0)=a_0 \Leftrightarrow 2=a_0$, $p(1)=a_0+a_1 \Leftrightarrow a_1=2$, $a_2=-\frac{3}{2}$, $a_3=1$.

Δηλαδή το πολυώνυμο παρεμβολής, είναι το:

$$p(x)=2+2x-\frac{3}{2}x(x-1)+x(x-1)(x-2)=x^3-4.5x^2+5.5x+2$$

Παρόλο που οι υπολογισμοί που απαιτούνται στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι εύκολοι, μέσα στην τάξη μπορεί επίσης να γίνει επαλήθευση του αποτελέσματος, χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Geogebra και συγκεκριμένα την εντολή `Πολυώνυμο[A,B,C,D]`, η οποία δημιουργεί το πολυώνυμο παρεμβολής, το οποίο διέρχεται από τα σημεία A, B, C, D.

Παρεμβολή με πολυώνυμο Lagrange

Ο βαθμός του πολυωνύμου που θα επιλέξουμε εξαρτάται αφενός από το πόσο απλή ή πολύπλοκη θέλουμε να είναι η γραφική παράσταση, καθώς επίσης και από πόσα γνωστά σημεία είναι επιθυμητό να διέρχεται ακριβώς. Σε κάθε περίπτωση στη διαδικασία είναι αναγκαίο να εκτιμηθεί και το μέγιστο δυνατό σφάλμα που θα υπάρχει στο τελικό αποτέλεσμα. Η παρεμβολή με πολυώνυμο Lagrange στηρίζεται στη διαφορετική αρχική γραφή του πολυωνύμου βαθμού που είναι επιθυμητός. Για παράδειγμα για τα δεδομένα του προηγουμένου πίνακα θεωρούμε ένα πολυώνυμο στη μορφή:

$$p(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+a_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)+$$
$$+a_2(x-x_1)(x-x_0)(x-x_3)+\ +a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_0),$$

στο οποίο αντικαθίστανται τα δεδομένα σημεία, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Αυτή τη φορά μόνο ένας όρος σε κάθε αντικατάσταση δε μηδενίζεται, οπότε έχουμε:

$$p(x)=a_0(x-1)(x-2)(x-3)+a_1(x-0)(x-2)(x-3)+$$
$$+a_2(x-1)(x-0)(x-3)+\ +a_3(x-1)(x-2)(x-0)\Leftrightarrow$$

$$p(1)=4\Leftrightarrow a_1=2,\ p(2)=3\Leftrightarrow a_2=-\frac{3}{2},\ p(3)=5\Leftrightarrow a_3=\frac{5}{6},\ a_0=\frac{1}{3}$$

Και τελικά προκύπτει το πολυώνυμο: $p(x)==x^3-4.5x^2+5.5x+2$.

Επίλογος

Συνοψίζοντας, οι ευκαιρίες για πραγματικά όμορφα Μαθηματικά στο σχολείο μπορούν να υπάρξουν ακόμα και διαμέσου καταστάσεων πίεσης, όπως υπάρχουν στη σημερινή καθημερινότητα. Οι διαφορετικές οπτικές, διαφορετικών κλάδων των Μαθηματικών, καθώς και οι εφαρμογές τους με συνδυασμούς διαφορετικών επιστημονικών αντικειμένων μόνο να ωφελήσουν μπορούν. Η Στατιστική, τα διακριτά Μαθηματικά και άλλοι εκτοπισμένοι κλάδοι των Μαθηματικών, είτε από το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, είτε από τη συμπίεση και το κρυφό πρόγραμμα σπουδών (πχ Γεωμετρία) έχουν αναγκαία θέση στα σχολικά Μαθηματικά και μαζί με τις εφαρμογές τους μπορούν να ωθήσουν σε μία ολοκληρωμένη άποψη και κατά συνέπεια ολοκληρωμένη σκέψη των μαθητών.

Αναφορές

1. Brillinger D.R., *John W. Tukey: His life and professional contributions,* The Annals of Statistics, vol.30,No.6, pp 1535-1575, 2002.

2.Geogebra αποθετήριο, *https://www.geogebra.org/material/show/id/165319*, ανάκτηση 30-01-2017.

3. Moore D.S., Cobb G.W., *Statistics and Mathematics: Tension and Cooperation, 2002.*

4. Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ., Σβέρκος Α., *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Γενικού Λυκείου,* ΙΤΥΕ Διόφαντος, 2012.

5. Ευθυμιόπουλος Χρήστος, *Σημειώσεις μαθήματος Αριθμητική Ανάλυση – Προγραμματισμός,* Τμήμα Στατιστικής και αναλογιστικής επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, http://www.samos.aegean.gr/actuar/cefthim/, ανάκτηση 31-01-2017.

6. Κάκουλλος Θεόφιλος, *Στατιστική: Θεωρία και εφαρμογαί,* Αθήνα 1972.

7. Μπούτσικας Μιχαήλ. *Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση (Simple Linear Regression): Σημειώσεις μαθήματος "Στατιστικά Προγράμματα"*. Πανεπιστήμιο Πειραιώς. Ανακτήθηκε στις 30-01-2017.

8. Νομοθεσία για τη λειτουργία των Π.Π.Σ., Νόμος 3966/2011 ΦΕΚ 1128Α.

9. Παπαϊωάννου Σ., Βοζίκης Χ., *Αριθμητική Ανάλυση,* ISBN 9789606033797, ΣΕΑΒ 2015, ανάκτηση από www.kallipos.gr 30-11-2016.

10. Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στα ΠΠΣ, ISSN: 2241-9535, Αθήνα, Σεπτέμβριος 2014.